Programme de colle n° 6, semaine du 2 au 7 novembre 2026.

Les points suivis d'une (*) sont ***à savoir*** *par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Pour cette semaine et la suivante, il s'agit d'une colle de révision. Si possible, poser l'un des exercices de la liste située en haut de la page « exercices ».
Pas de fonction continue par morceaux pour l'instant et peu d'exercices traités sur l'intégration.

1 Ce que l'on sait sur les intégrales

• Lorsque $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a été définie en première année.

• Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue alors, en écrivant $f = g + ih$ avec g et h des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, les fonctions g et h sont continues (et c'est d'ailleurs une équivalence). On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}.$$

• Les techniques usuelles (IPP, changement de variable, théorème fondamental, « positivité » de l'intégrale...)

2 Intégrale impropre des fonctions $f : [a,+\infty[\to \mathbb{C}$

2.1 Généralités

• Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction C^0. On dit que *l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge lorsque : $\exists \lim_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{C}$. Dans ce cas on écrit alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \ell$

Commentaires

(1) Ne pas « calculer » avec $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sans avoir assuré l'existence de cette limite.

(2) Dés que l'on peut, on utilise une primitive de la fonction intégrée...

Théorème. *Soient $f : [a,+\infty[\to \mathbb{C}$ et $g : [a,+\infty[\to \mathbb{C}$ des fonctions C^0.*

1. *Si les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$ convergent alors pour tout α dans $\mathbb{C}$ l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big(f(t)+\alpha g(t)\big)\ \mathrm{d}t$ converge.*
2. *L'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si pour tout $x \geqslant a$ réel l'intégrale impropre $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Dans ce cas on a la relation de Chaslès :*
$$\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t.$$
3. (*) *Si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge le reste intégral $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $x \geqslant a$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. De plus, comme f est continue, la fonction R est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ avec $R' = -f$.*

• « *Positivité* » donc « *croissance* » de l'intégrale.

• (*) **LES PICS**. Nous avons trouvé des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$, positives, telles que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et f n'admet pas de limite en $+\infty$.

• (*) *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f$ *converge.* $\boxed{\text{Si}}$ $\exists \lim_{+\infty} f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *alors* $\ell = 0$.

2.2 Le cas des fonctions continues $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, positives

THÉORÈME. *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ C^0 *et* ***positive****. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

(ii) La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *est majorée.*

Dans ce cas on a $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x \geqslant a} F(x)$.

THÉORÈME. *Soient* f *et* g *dans* $C^0([a, +\infty[, \mathbb{R})$, C^0 *et* ***positives****. On suppose que* $0 \leqslant f \leqslant g$.

1. *Si l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} g$ *converge alors il en va de même de* $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. *Si l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge alors il en va de même de* $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

• (*) On a vu que, si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ **continue** et **positive** telle que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente de valeur 0 alors $f = 0$.

• **Les intégrales de comparaison.**

THÉORÈME.

1. *Soit* $\alpha > 0$*, réel. L'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ *converge si et et seulement si* $\alpha > 0$*. Dans ce cas sa valeur est*
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}.$$
2. ***Intégrales de Riemann****. Soit* α*, réel. L'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

3 Convergence absolue et intégrabilité

• Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction C^0. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument* lorsque l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

THÉORÈME. *Soit* $f : [a, +\infty \to \mathbb{C}$ *une fonction* C^0*. Si l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f$ *converge absolument, elle converge. Dans ce cas on a l'inégalité triangulaire :*
$$\left| \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(*) Démonstration de ce théorème dans le cas où f est à valeurs réelles.

• **Fonctions intégrables sur** $[a, +\infty[$. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction C^0. On dit que f est *intégrable* sur $[a, +\infty[$ lorsque l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

• Attention au vocabulaire : il existe des fonctions **non intégrables** sur $[a, +\infty[$ telles que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge !

THÉORÈME. *Soient* f *et* g *dans* $C^0([a, +\infty[, \mathbb{C})$.

(1) *Si* $|f| \leqslant |g|$ *alors l'intégrabilité de* g *sur* $[a, +\infty[$ *implique celle de* f *et la non intégrabilité de* f *implique la non intégrabilité de* g.

(2) *Si* $f(x) \underset{+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$ *alors l'intégrabilité de* g *sur* $[a, +\infty[$ *implique celle de* f.

(3) *Si* $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ *alors les fonction* f *et* g *sont simultanément intégrables sur* $[a, +\infty[$*, autrement dit les intégrales impropres* $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ *ont même nature.*

Rappelons que :

- $f(x) \underset{+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$ signifie qu'il existe M réel et $A \geqslant a$ tels que pour tout $x \geqslant A$ on ait : $|f(x)| \leqslant M\,|g(x)|$.
- $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ signifie qu'il existe $A \geqslant a$ réel et une fonction ε telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ tels que pour tout $x \geqslant A$ on ait : $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$.

• **Conséquence fondamentale**. Pour montrer l'intégrabilité d'une fonction C^0 $f : [a,+\infty[\to \mathbb{C}$, on cherche $\alpha > 1$ tel que :

$$t^\alpha f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans ce cas $f(t) \underset{+\infty}{=} O\big(\frac{1}{t^\alpha}\big)$ et comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann : $\alpha > 1$), on peut conclure, par domination, que f est intégrable.
On regarde bien sûr tout d'abord si ça marche avec $\alpha = 2$!

4 Au passage

• (*) Le lemme de Riemann-Lebesgue : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 alors :

$$\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La semaine prochaine : poursuite de intégration (étude à distance finie)