Programme de colle n° 5, semaine du 12 au 17 octobre 2026.

Les points suivis d'une (*) sont ***à savoir*** *par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

1 Continuité

1.1 Généralités

• Soient $(E, \|\ \|_E)$, $(F, \|\ \|_F)$ des espaces vectoriels normés, $a \in A \subset E$ et $f : E \to F$. On dit que f est *continue* en $a \in A$ lorsque :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,(\forall x \in A)\,(\|x - a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon)$$

La fonction f est dite *continue sur* A lorsqu'elle est continue en tout point a de A. On note $C^0(A, F)$ l'ensemble des applications continues de A dans F.

• Les applications coordonnées de $\mathbb{R}^n$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$ (avec n'importe quelle norme : elle sont équivalentes).

• **Caractérisation séquentielle de la continuité**.

(*)Théorème. *Soient $(E, \|\ \|_E)$, $(F, \|\ \|_F)$ des espaces vectoriels normés, $a \in A \subset E$ et $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue en a.*
(2) *Pour toute suite (x_n) dans A telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a \in A$ alors $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.*

• **Opérations classiques sur les fonctions continues.**

Théorème. *Soient $(E, \|\ \|_E)$, $(F, \|\ \|_F)$ des espaces vectoriels normés, $a \in A \subset E$ et $f : E \to F$.*

1. *Toute combinaison linéaires de fonctions continues sur A est continue sur A : $C^0(A, F)$ est un sous-espaces vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.*
2. *Le produit de deux fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$ est encore une fonction continue sur A.*
3. *Sous réserve d'existence, le quotient de deux fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur A.*
4. ***Composition.*** *Si f est continue, si B est une partie de F contenant $f(A)$ si $g : B \to G$ est continue où G est un espace vectoriel normé, alors $g \circ f$ est continue.*

En particulier les fonctions polynomiales et les quotients de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ (lorsque…) sont continues.

1.2 Fonction lipschitzienne

• Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F))$ deux espaces vectorielles normés, $k \geqslant 0$ réel. On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est lipschitzienne de rapport k lorsque pour tout $(x, y) \in E$ on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k \|x - y\|_E .$$

• (*) Exemples de la norme.

Théorème. *Toute fonction lipschitzienne est continue.*

2 Adhérence, parties fermées d'un espace vectoriel normé, densité

2.1 Adhérence

Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.
L'adhérence de A dans E, noté $\overline{A}$ est l'ensemble des points de E qui sont limites de suites d'éléments de A.

2.2 Fermés de E

• Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.
On dit que A est (séquentiellement) fermé dans E lorsque $\overline{A} = A$.

Pour montrer qu'une partie A d'un espace vectoriel est fermée dans E, on peut prendre une suite (x_n) dans A qui converge vers un élément ℓ de E et on montre que $\ell \in A$.

(*) THÉORÈME. *Soient $f : E \to F$ une application continue et B une partie fermée de F. Alors l'image réciproque $f^{-1}(B)$ est une partie fermée de E.*

• Les sphères, les boules fermées d'un espace vectoriel normé E sont des fermés de E.

2.3 Densité

• Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.
On dit que A est dense dans E lorsque $\overline{A} = E$ i.e. lorsque tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.

3 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés

• THÉORÈME. *Soient E et F des espaces vectoriels normés avec $E \neq \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) f est continue.
(2) f est lipschitzienne.
(3) $(\exists M \geqslant 0)(\forall x \in E)(\|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E)$.

• Illustrations élémentaires

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

4.1 Suites convergentes dans un espace vectoriel de dimension finie

• En dimension finie, « **la convergence est équivalente à la convergence coordonnée par coordonnée** »

THÉORÈME. *Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_p)$ une base d'un espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ de dimension finie et (u_n) une suite dans E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on écrit $u_n = \sum_{k=1}^{p} x_k(n) e_k$. Pour $\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) La suite (u_n) converge vers ℓ dans $(E, \| \|)$.
(2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, la suite $(x_k(n))$ converge vers ℓ_k dans $\mathbb{K}$.

• Exemples avec des suites de matrices.

4.2 Continuité en dimension finie

• En dimension finie, « **la continuité est équivalente à la continuité composante par composante** »

Soient $(E, \| \|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \| \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$, $f : A \to F$. Lorsque $\beta = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F, pour tout x dans E on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i,$$

où $f_i(x)$ est la i-ième coordonnées de $f(x)$ dans β. Cela définit des applications $f_i : E \to \mathbb{K}$ appelés les composantes de f dans β, et on écrit :

$$f = (f_1, \ldots, f_p).$$

THÉORÈME. *Soient $(E, \| \|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \| \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $a \in A \subset E$, $f : A \to F$. Soient $\beta = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F « dans laquelle on écrit » on écrit $f = (f_1, \ldots, f_p)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) f est continue en a.
(2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, la fonction f_k est continue en a.

4.3 Extrema et continuité en dimension finie

THÉORÈME. *Toute fonction réelle continue sur une partie **fermée et bornée** d'un espace vectoriel normé E **de dimension finie** est bornée et atteint ses bornes.*

4.4 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

(*)Théorème. *Soient $(E, \| \ \|_E)$ un espace vectoriel normé* ***de dimension finie****, $(F, \| \ \|_F)$ un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est continue.*

• Exemples de $M \mapsto AM$, de $M \mapsto PMP^{-1}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Soient $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels. Une application $f : E_1 \times \ldots \times E_p$ est dite p-linéaire lorsque pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1, \ldots, E_p$ l'application :

$$f_i : x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

est linéaire de E_i dans F.

Théorème. *Lorsque les E_i sont tous de dimension finie, les application p-linéaires sont continues.*

Remarque 4.1
Le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est continue, le déterminant...

5 Au passage

• (*) Le théorème des trois hypothèses de Trotabas. *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

- *f est continue.*
- *f est positive.*
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Alors f est nulle sur le segment $[a, b]$.

• (*) Théorème. Inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky. *Si $(E, \langle ., . \rangle)$ est un espace pré-hilbertien réel alors pour tout $(x, y) \in E^2$ on a :*

$$\boxed{|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

• **Une re-écriture du théorème fondamental.** *Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$. Lorsque $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I alors pour tout x dans I on a :*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

• (*) **Principe de prolongement des identités**. Soient $(E, \| \ \|_E)$,$(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Si deux fonctions continues $f : E \to F$ et $g : E \to F$ coïncident sur une partie dense de E alors elles sont égales.

• (*) La fonction distance à une partie non vide A d'un espace vectoriel normé est 1-lipschitzienne.

La semaine prochaine : intégration