Programme de colle n° 4, semaine du 5 au 10 octobre 2026.

Toute l'algèbre linéaire est au programme, notamment les questions (*) du programme précédent !

Les points suivis d'une (*) sont ***à savoir*** *par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Généralités

• Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur E est une application $\| \| : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie pour tout x, y dans E et λ scalaire :

— $\|x\| \geqslant 0$
— $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
— $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
— ***Inégalité triangulaire*** : $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

• Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \| \|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et où $\| \|$ est une norme sur E.

1.2 Exemples de normes

• Sur $\mathbb{K}^n$ on a les normes usuelles suivantes ($v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$) :

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \|v\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\| \|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ (dans le cas de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nous avons très brièvement justifié l'IT par un argument HP)

• Sur l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,on a vu les exemples de normes ($A \in E$) :

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |(A)_{i,j}|, \quad \|A\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |(A)_{i,j}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2} |(A)_{i,j}|.$$

Nous avons vu que $\| \| = n \| \|_\infty$ et $\| \|_2$ sont des « normes d'algèbre » sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Sur l'espace E des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ on a vu les exemples de normes ($f \in E$) :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}, \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

La norme $\| \|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 fg$.

• (*) Lorsque X est un ensemble non vide et $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$, $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ est une norme sur E. Bien noter que, pour l'inégalité triangulaire, on passe d'abord à la borne supérieure « à droite » :

Pour f et g dans E, on a pour tout $x \in X$:

$$|(f + g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \underbrace{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}_{\text{indépendant de } x},$$

donc $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants.

1.3 Distance associée à une norme

• Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Pour $(x, y) \in E$ on pose

$$\text{dist}(x, y) = \|y - x\|.$$

On a vu l'inégalité triangulaire pour cette distance.

• Lorsque A est une partie non vide de E, pour x dans E on définit :

$$\text{dist}(x, A) = \inf_{x \in A} \text{dist}(x, a).$$

1.4 Boules et Sphères

• Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$.

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r est :

$$B(a, r) = \{x \in E \mid \text{dist}(a, x) < r\}.$$

2. La boule fermée de centre a et de rayon r est :

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \text{dist}(a, x) \leqslant r\}.$$

3. La sphère de centre a et de rayon r est :

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \text{dist}(a, x) = r\}.$$

• On a vu la forme des boules unités sur $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles et regardé l'allure de la « médiatrice » dans $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_\infty)$.

1.5 Parties convexes d'un espace vectoriel

• Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une partie A de E est convexe lorsque pour tout $(m, p) \in A^2$ le segment d'extrémité m et p est encore dans A, ce qui se traduit par :

$$(\forall \lambda \in [0, 1])\ ((1 - \lambda)m + \lambda p) \in A.$$

• On a remarqué que pour tout $a \in E$ on a : $(1 - \lambda)a + \lambda a = a$.

(*)Théorème. *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.*

1. *Les boules de E sont convexes.*
2. *Une intersection de parties convexes de E est encore convexe* (point n'est besoin de norme pour cette propriété).

1.6 Parties bornées d'un espace vectoriel normé

• On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\|)$ est bornée lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ réel tel que pour tout $v \in A$ on ait : $\|v\| \leqslant M$.

• Noter que la notion de partie bornée dépend de la norme.

• On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\|)$ est bornée lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ réel tel que pour tout $v \in A$ on ait : $\|v\| \leqslant M$.

1.7 Suites dans les espaces vectoriels normés

• Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, (u_n) une suite dans E et $\ell \in E$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque $\|u_n - \ell\| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon)$$

On écrit alors : $u_n \underset{+\infty}{\overset{\| \ \|}{\longrightarrow}} \ell$

• La notion de convergence de suite dépendait de la norme (ce ne sera pas le cas en dimension finie)

(*) Théorème.

1. *Lorsqu'une suite dans un espace vectoriel normé converge, il y a unicité de la limite.*
2. *Une suite convergente dans un espace vectoriel normé est bornée.*

• Extraction et suites extraites. Une extraction est une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante. (*) Lorsque φ est une extraction, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geqslant n$.

(*) Théorème. *Soit une suite (u_n) dans un espace vectoriel normé qui converge vers $\ell \in E$. Toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.*

• Opérations sur les limites.

Théorème. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans un espace vectoriel normé qui convergent respectivement vers $u \in E$ et $v \in E$. Alors, pour tout α et β dans $\mathbb{K}$, la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge vers $\alpha u + \beta v$.*

1.8 Normes équivalentes

• Soient $\| \ \|$ et N des normes sur un espace vectoriel E. On dit que la norme $\| \ \|$ est équivalente à la norme N lorsqu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\alpha \| \ \| \leqslant N \leqslant \beta \| \ \|,$$

i.e. pour tout v dans E : $\alpha \|v\| \leqslant N(v) \leqslant \beta \|v\|$.

Théorème. *Lorsque $\| \ \|$ et N sont deux normes équivalentes sur E alors elles ont les même bornés et les même suites convergentes.*

• Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on peut penser à chercher une suite dans E qui converge pour une des normes et qui ne converge pas pour l'autre norme.

• (*) Sur $E = \mathbb{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ on a vu que les normes $\| \ \|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f|$ et $\| \ \|_\infty : f \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |f(t)|$ ne sont pas équivalentes.

THÉORÈME. [**Admis**] *Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes i.e. si $\| \ \|$ et N sont deux normes sur E il existe deux constantes réelles* ***strictement positives*** *α et β telles que :*

$$\alpha \| \ \| \leqslant N \leqslant \beta \| \ \| .$$

2 Au passage

• (*) LE THÉORÈME DES TROIS HYPOTHÈSES DE TROTABAS. *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

- *f est continue.*
- *f est positive.*
- *$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.*

Alors f est nulle sur le segment $[a,b]$.

• (*) THÉORÈME. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ-BOUNIAKOWSKY. *Si $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace pré-hilbertien réel alors pour tout $(x,y) \in E^2$ on a :*

$$\boxed{|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

• **Une re-écriture du théorème fondamental.** *Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$. Lorsque $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I alors pour tout x dans I on a :*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

• A propos de l'implication :

$$AB = 0 \Rightarrow (A = 0 \ \text{ ou } \ B = 0).$$

Cette implication est vraie pour A et B dans $\mathbb{C}$, ou dans $\mathbb{C}[X]$. Mais **elle est fausse en général** pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geqslant 2$). Dans ce dernier cas (pensez à la loi $\circ$) on a :

$$AB = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, B \subset \ker A$$

La semaine prochaine : équivalence des normes, applications continues entre espaces vectoriels normés...