Programme de colle n° 3, semaine du 28 septembre au 3 octobre.

Les points suivis d'une (*) sont ***à savoir*** *par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

1 Stabilité

• Soient F un sous-espace de E et u dans $\mathcal{L}(E)$. On dit que F est u-stable lorsque $u(F) \subset F$. Si c'est le cas on peut alors définir correctement un élément u_F de $\mathcal{L}(F)$ en posant $u_F(x) = u(x)$ pour tout x dans F : u_F est l'endomorphisme induit par u sur F.

• (*) *Si $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, si $F_k = vect(e_1, \dots, e_k)$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ alors $[f]_\beta$ est triangulaire supérieure si et seulement si chaque F_k est f-stable.*

• Soient F et G des sous-espaces supplémentaires de E (de dimension finie $n \geqslant 1$), $f \in \mathcal{L}(E)$. On note β_1 une base de F et β_2 une base de G. Soit $\beta = rec(\beta_1, \beta_2)$ (qui est donc une base de E puisque $E = F \oplus G$). Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(i) *F et G sont f-stables.*

(ii) *La matrice de f dans β est de la forme* $[f]_\beta = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$

De plus si l'une de ces propriétés est réalisée alors $[f_F]_{\beta_1} = A$ et $[f_G]_{\beta_2} = B$.

• Généralisation du résultat précédent à une somme directe comportant plus de deux termes.

• Opérations par blocs sur les matrices (produit et somme lorsque...).

2 Similitude

• Lorsque A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on dit que A et B sont semblables et on écrit $A \sim B$ lorsqu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. La relation $\sim$ est d'équivalence.

• Si $A \sim 0$ alors $A = O_n$. Si $A \sim I_n$ alors $A = I_n$

(*)Théorème. *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases éventuellement différentes.*

• Si A et B sont semblables, elles ont même trace, même déterminant, même spectre et même rang. **On utilise ces résultats pour montrer que deux matrices <u>NE sont PAS</u> semblables**.

3 Compléments sur les déterminants

• Lorsque A et B sont des matrices carrées on a :

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \ \det B.$$

Généralisation du résultat précédent avec p matrices carrées sur la diagonale.

• (*) **Le déterminant de Vandermonde**. Pour $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ on a :

$$V_{n+1}(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^n & \lambda_1^n & \cdots & \lambda_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

• (*) Déterminants tri-diagonaux et rappels sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (voir résumé plus bas).

• (*) **Déterminants de Hurwitz**. Pour $a_1, \dots, a_n$ et $b \neq c$ dans $\mathbb{K}$, calcul de :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ c & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a_n \end{vmatrix}$$

en passant par la fonction $f : x \mapsto \begin{vmatrix} a_1 - x & b - x & \cdots & b - x \\ c - x & a_2 - x & & \vdots \\ \vdots & & & b - x \\ c - x & \cdots & c - x & a_n - x \end{vmatrix}$ qui est affine.

• **Déterminant et trace d'un endomorphisme.** On a rappelé que si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$ le déterminant de la matrice de f dans une base β de E ne dépend pas du choix de la base β : c'est le déterminant de f, noté $\det f$. De la même manière, la trace de $[f]_\beta$ ne dépend pas du choix de β, c'est la trace de f.

4 Au passage

• (*) **Moins de trente secondes pour résoudre un système** $2 \times 2 \ldots$

• (*) Théorème. Inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky. *Si $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace pré-hilbertien réel alors pour tout $(x, y) \in E^2$ on a :*

$$\boxed{|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

• Exemple d'opérateurs linéaires définis à l'aide d'intégrales. (*) L'exercice 1 de la feuille d'exercice 2.

• Calcul avec les matrices élémentaires...

• (*) En exercice, les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose $\varphi_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$; cette dernière application est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

• (*) Théorème de représentation de Riesz en devoir. Si f est une forme linéaire sur un espace euclidien E alors il existe un unique a dans E tel que $f = \langle a, . \rangle$.

• **Les suite récurrentes linéaires d'ordre 2.** On considère ici une suite (u_n) dans $\mathbb{K}$ définie par la relation de récurrence pour n entier naturel

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \quad (\clubsuit)$$

où a et b sont dans $\mathbb{K}$.

Ces suites forment un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 2. Pour déterminer ces suites on considère l'équation caractéristique :

$$(EC) \quad X^2 - aX - b = 0$$

— Lorsque (EC) a deux racines **distinctes** r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ alors les suites dans $\mathbb{K}$ qui vérifient $(\clubsuit)$ sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto \alpha r_1^n + \beta r_2^n \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

— Lorsque (EC) a une racine **double** r dans $\mathbb{K}$ alors les suites dans $\mathbb{K}$ qui vérifient $(\clubsuit)$ sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto (\alpha n + \beta) r^n \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

— Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on a un cas supplémentaire. Lorsque (EC) n'a pas de solution réelle, elle admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ et alors les suites dans $\mathbb{R}$ qui vérifient $(\clubsuit)$ sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto \rho^n (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta) \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

La semaine prochaine : espaces vectoriels normés, premiers pas.