Programme de colle n° 2, semaine du 21 au 25 Septembre.

Les points suivis d'une (*) sont ***à savoir*** *par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

N'hésitez pas à demander les valeurs propres d'une matrice 3×3...

Commentaires

Les étudiantes et étudiants doivent savoir comment déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire dont on donne la matrice dans un couple de base.

1 Produit d'espaces vectoriels

Lorsque $E_1, \dots, E_p$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, rappelons que $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ désigne l'ensemble :

$$\{(x_1, \dots, x_p) \mid (\forall i \in \{1, \dots, n\})(x_i \in F_i)\}.$$

On peut définir sur E une structure d'espace vectoriel de la manière suivante. Soient $X = (x_1, \dots, x_p) \in E$, $Y = (y_1, \dots, y_p) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose :

$$\begin{cases} X + Y & = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \\ \lambda X & = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \end{cases}$$

Théorème. *Avec les notation ci-dessus, lorsque chaque E_i est de dimension finie, E est de dimension finie avec :*

$$\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i.$$

2 Somme directe de sous-espaces vectoriels

• Soient E un espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E (où n est un entier $\geqslant 1$). On pose :

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{k=0}^{n} F_k = \{x_1 + \cdots + x_n \mid (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p n\}$$

On dit que la somme $F = \sum_{k=0}^{p} F_k$ est **directe** et on écrit : $F = \bigoplus_{k=0}^{p} F_k = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ lorsque tout élément x de F s'écrit de manière **unique** $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$.

Théorème. *Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe*
(ii) *Pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$ on a $x_1 = \ldots = x_p = 0$.*

• **Recollement de bases et dimension d'une somme directe**. Je rappelle que lorsqu'on recolle deux bases on n'obtient pas forcément une famille libre (et c'est même rarement le cas). Mais on a le résultat suivant :

Théorème. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de dimension finie de E et $\beta_1, \dots, \beta_p$ des bases de $F_1, \dots, F_p$ respectivement. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.
(ii) *$\beta = rec(\beta_1, \dots, \beta_p)$ est une famille libre de E.*

THÉORÈME. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de dimension finie de E et $\beta_1, \dots, \beta_p$ des bases de $F_1, \dots, F_p$ respectivement. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La somme* $\sum_{i=1}^{p} F_i$ *est directe.*

(ii) $\dim \sum_{i=1}^{p} F_i = \sum_{i=1}^{m} \dim F_i$.

3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

• THÉORÈME. *Avec les notations précédentes, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.*

• Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Lorsque $E = F \oplus G$, on dit que F et G sont **supplémentaires** dans E. Lorsque E est de dimension finie il est facile de montrer que tout sous-espace admet un supplémentaire (via le théorème de la base incomplète).

• En dimension finie on utilise le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soient F et G des sous-espaces de E de dimension finie. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. $E = F \oplus G$
2. $F \cap G = \{0\}$ ***et*** $\dim F + \dim G = \dim E$.

• **Projection**. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. La projection sur F parallèlement à G est l'application $p : E \to E$ définie de la manière suivante : $p(x) = f$ lorsque $x = f + g$ selon $E = F \oplus G$. On a alors (*) $p \in \mathcal{L}(E)$, (*) $\ker p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$. Enfin $p^2 = p$.

• **Projecteurs**. Un projecteur de E est un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.

(*)THÉORÈME. *Si p est un projecteur de E alors $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$: un projecteur est la projection parallèlement à $\ker p$ sur $\operatorname{Im} p$.*

• Symétries : tout passe par $s = 2p - \mathrm{Id}$ où...

4 Formes linéaires et hyperplans

• Une forme linéaire sur E est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. L'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ s'appelle le dual de E et se note autant E^*. Lorsque E est de dimension finie on a : $\dim E = \dim E^*$.

• Si E est de dimension $n \geqslant 1$, la matrice d'un forme linéaire dans un couple de base est une ligne i.e. un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

• Un **hyperplan** de E est un sous-espace vectoriel de E de codimension 1.

THÉORÈME. *Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$.*

1. *Une forme linéaire non (identiquement) nulle sur E est toujours surjective.*
2. (*) *Les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles.*

• Équations d'un hyperplan.

• Une forme linéaire particulière : la trace. Lorsque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $M = [m_{i,j}]$, on pose : $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ (c'est la somme des éléments diagonaux de M.
On définit ainsi une application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

(*)THÉORÈME. *Soit $n \geqslant 1$ entier.*

1. *L'application* tr *est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
2. *Pour U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\operatorname{tr}(UV) = \operatorname{tr}(VU)$.*
3. *La trace est invariant de similitude : si deux matrices sont semblables, elles ont même trace.*

5 Au passage

• Calcul avec les matrices élémentaires : $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_j^k E_{i,\ell} \dots$.

• (*) En exercice, les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose $\varphi_A : M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$; cette dernière application est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

La semaine prochaine : fin de l'algèbre linéaire (rappels sur les déterminants..., puis espaces vectoriels normés)