Programme de colle fictif n° 22, topologie des espaces vectoriels normés.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

1 Outils et savoirs-faire essentiels sur les espaces vectoriels normés

Je liste les outils et savoirs-faire que je juge essentiels des deux chapitres concernant les espaces vectoriels normés.

1.1 Généralités

• Définition d'une norme et les exemples classiques. Normes équivalentes. Montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.

• Convergence de suites dans les espaces vectoriels normés : définition, unicité de la limite, règles opératoires.

• **Ouverts d'un espace vectoriel normé** : définition. Pour prouver que $\mathcal{O}$ est un ouvert d'un espace vectoriel normé E, on peut :
— Revenir à la définition ;
— Montrer que $F = \mathcal{O}^c$ est un fermé de E.
— Réaliser $\mathcal{O}$ comme l'image réciproque par une application continue d'un ouvert.

• **Fermés d'un espace vectoriel normé. La caractérisation séquentielle des fermés : c'est essentiel**.

• **Adhérence.** (*)**La caractérisation séquentielle de l'adhérence : c'est essentiel**.

• Définition d'une partie dense. Pour montrer qu'une partie est dense dans un espace vectoriel normé, on utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence. (*) $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

• Continuité des applications entre espaces vectoriels normés. Caractérisation séquentielle de la continuité. Caractérisation globale de la continuité : cela permet de construire des ouverts et des fermés. Applications lipschitziennes. (*) La norme est 1-lipschitzienne.

• Applications linéaires continues.

1.2 La dimension finie

• Toute application continue d'un fermé borné d'un espace vectoriel **de dimension finie** à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

• **Toutes les normes sur un espace vectoriel de <u>dimension fini</u> sont équivalentes.**

Conséquences. Lorsque E est un espace vectoriel de **dimension finie** :
1. La convergence d'une suite dans E et sa limite ne dépend pas du choix de la norme.
2. Les parties bornées de E sont les mêmes pour toute norme sur E.
3. Les fermés de E sont les mêmes pour toute norme sur E.
4. Les ouverts de E sont les mêmes pour toute norme sur E.

• En dimension finie, la convergence de suites de vecteurs est équivalente à la convergence des suites des coordonnées des vecteurs.

• En **<u>dimension finie</u>**, les applications linéaires et multilinéaires sont continues. En particulier :
— $A \mapsto {}^tA$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— $(A, B) \mapsto AB$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— Lorsque P est dans $GL_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Continuité par composantes, fonctions polynomiales, fractions rationnelles... $A \mapsto \det A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car polynomiale.

2 Topologie des espaces vectoriels normés : résumé

2.1 Ouverts d'un espace vectoriels normé

• Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de E est <u>*un ouvert de E*</u> lorsque pour tout $a \in \mathcal{O}$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, \varepsilon)$ est incluse dans $\mathcal{O}$.

Par exemple E et $\emptyset$ sont des ouverts de E. Les intervalles ouverts de $(\mathbb{R}, \| \|$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. E et $\emptyset$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

• **Une mention spéciale sur le vocabulaire** : la notion d'ouvert est relative à l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$; on parle d'ouvert de E, ou de $(E, \| \|)$ (et non d'ouvert tout court).

(*) Théorème. *Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé.*

1. *Les boules ouvertes de E sont des ouverts de E.*
2. *Une intersection **finie** d'ouverts de E est un ouvert de E.*
3. *Une union quelconque d'ouverts de E est encore un ouvert de E.*

• Exemple variés, union d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$...

2.2 Fermés d'un espace vectoriel normé

• Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $F \subset E$ est fermé dans E lorsque son complémentaire F^c est un ouvert de E.

Théorème. *Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé.*

1. *Les boules fermées, les sphères de E sont des ouverts de E.*
2. *Une union **finie** de fermés de E est un fermé de E.*
3. *Une intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E.*

• Par exemple, E et $\emptyset$ sont des fermés (et des ouverts) de E. Les singletons sont des fermés de E. Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$, i.e. les intervalles de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et $] - \infty, a]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

• **Caractérisation séquentielle des fermés.**
(*) Théorème. *Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $F \subset E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) A est fermé dans E
(2) *Pour tout suite (x_n) dans F qui converge vers $\ell \in E$, on a $\ell \in F$*

(*) En exercice : lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, le graphe de f est fermé dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_2)$.

2.3 Point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle.

• Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$, non vide. On dit que $x \in E$ est adhérent à A lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Autrement dit, x est adhérent à A lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ (qui dépend de ε) tel que $|x - a| \leqslant \varepsilon$.

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points de E adhérents à A : c'est *l'adhérence de A dans E.*

(*)Théorème. *Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$, non vide. Pour $x \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $x \in \overline{A}$
(2) *Il existe une suite (a_n) dans A telle que $a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$.*

2.4 Invariance des notions topologiques pour des normes équivalentes.

Théorème. *Soient E un espace vectoriel normé, $\| \|_1$ et $\| \|_2$ deux normes **équivalentes** sur E.*

(1) *Les fermés de $(E, \| \|_1)$ et de $(E, \| \|_2)$ sont les mêmes.*
(2) *Les ouverts de $(E, \| \|_1)$ et de $(E, \| \|_2)$ sont les mêmes.*
(3) *Lorsque $A \subset E$, l'adhérence de A dans $(E, \| \|_1)$ est la même que l'adhérence de A dans $(E, \| \|_2)$.*

2.5 Parties denses d'un espace vectoriel normé.

• Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $A \subset E$ est dense dans E lorsque $\overline{A} = E$.

• Avec les notations ci-dessus on a donc l'équivalence : *A est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.*

2.6 Points intérieurs

Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et $a \in A \subset E$. On dit que a est intérieur à A lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.

Ainsi A est un ouvert de E si et seulement si tous les points de A sont intérieurs à A.

2.7 Caractérisation globale de la continuité

• THÉORÈME. *Soient E, F des espaces vectoriels normés, $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *L'application f est continue*
2. *L'image réciproque de tout ouvert de F par f est un ouvert de E.*
3. *L'image réciproque de tout fermé de F par f est un fermé de E.*

• En particulier on retrouve le fait qu'une boule ouverte est un ouvert de E et que les sphères et les boules fermées de E sont des fermés de E.

• On se sert de ce théorème pour démontrer que des parties d'un espace vectoriel normé sont ouvertes ou fermées, très souvent avec $F = \mathbb{R}$. (*) Bien voir les exemples de cours sur des parties de $\mathbb{R}^n$ définies à l'aide d'inégalités ou d'égalités.

2.8 Extrema et continuité en dimension finie

THÉORÈME. *Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée d'un espace vectoriel E* ***de dimension finie*** *est bornée et atteint ses bornes.*