

Programme de colle n° 21, semaine du 24 mars au 28 mars 2025.

Les points suivis d'une () sont à **savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Tout le bilinéaire, notamment les endomorphismes particuliers des espaces euclidiens.

1 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

• Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une isométrie vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) lorsque pour tout x dans E on a : $\|f(x)\| = \|x\|$. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E .

• Une isométrie vectorielle de E est inversible !

• THÉORÈME. Soit E un espace euclidien. Alors « $O(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$ » : pour f et g dans $O(E)$, on a

1. $f \circ g \in O(E)$
2. $f^{-1} \in O(E)$

• THÉORÈME. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $f \in O(E)$
- (2) $(\forall (x, y) \in E^2)(\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle)$

• THÉORÈME. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $f \in O(E)$
- (2) Pour toute base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E , la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E .
- (3) Il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit une base orthonormale de E .

• THÉORÈME. Soient E un espace euclidien, $f \in O(E)$ et F un sous-espace f -stable de E . Alors $F^\perp$ est f -stable

2 Matrices orthogonales

• Les **matrices orthogonales** sont les matrices Ω de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^t\Omega\Omega = I$. On retient qu'une matrice orthogonale Ω est inversible et $\boxed{\Omega^{-1} = {}^t\Omega}$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Si P est dans ${}_n(\mathbb{R})$ alors :

- P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$: pas de calcul pour l'inverse !
- $\det P = \pm 1$. On note $SO_n(\mathbb{R})$ les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

• « $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle » : pour P et Q dans $O_n(\mathbb{R})$, on a

1. $PQ \in O_n(\mathbb{R})$
2. $P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

• (*) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $P \in O_n(\mathbb{R})$
- (2) Les colonnes de P forment une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

• THÉORÈME. Soient E un espace euclidien, $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $f \in O(E)$
- (2) Pour toute base orthonormale β de E , on a $[f]_\beta \in O_n(\mathbb{R})$.
- (3) Il existe une base orthonormale β de E telle que $[f]_\beta \in O_n(\mathbb{R})$.

• THÉORÈME. Les matrices orthogonales sont exactement les matrices de passage entre bases orthonormales d'un espace euclidien E de dimension n .

- (*) Exemple des réflexions (symétries orthogonales par rapport à un hyperplan). Si H est un hyperplan de E avec $H = a^\perp$, la réflexion par rapport à H est :

$$x \mapsto x - 2 \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} a.$$

2.1 Orientation d'un espace vectoriel euclidien

Orienter un espace euclidien c'est choisir une base orthonormée β_0 de E . Les **bases orthonormées directes** de E sont alors les bases β pour lesquelles la matrice de passage de β_0 à β est de déterminant 1.

3 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

- (*) THÉORÈME. Les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ et celles de $O(2)$ de déterminant -1 sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
- D'après le théorème précédent, une matrice A de $SO_2(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$, et représente ainsi la rotation d'angle θ dans le sens direct de $\mathbb{R}^2$ canonique. Par conséquent deux matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent.

- De même, une matrice A de $O_2(\mathbb{R})$ de déterminant -1 s'écrit sous la forme $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ et représente la réflexion par rapport à la droite dirigée par le vecteur $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$ dans $\mathbb{R}^2$ canonique.

• **Traduction en terme d'endomorphisme.** Ici E est un espace euclidien de dimension 2. En regardant la matrice d'un élément de $O(E)$ dans une base orthonormale (qui sera d'une des formes données par le théorème ci-dessus), on peut classer les éléments de $O(E)$.

- Les éléments de $SO(E)$ sont des rotations.
- Les éléments de $O(E)$ de déterminant -1 sont des réflexions par rapport à des droites.

- **Rappel.** Dans le plan complexe orienté, la rotation d'angle θ est $z \mapsto ze^{i\theta}$.

4 Endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien

4.1 Le théorème spectral

- Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel. Un endomorphisme f de E est dit **symétrique**, ou **auto-adjoint**, lorsque pour tout x, y dans E on a :

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoint de E . C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- THÉORÈME. Lorsque $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , un endomorphisme f de E est auto-adjoint si et seulement si $\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$ pour tout (i, j) .
- THÉORÈME. Soient $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est auto-adjoint
- (ii) Il existe une base orthonormale β de E telle que $[f]_\beta$ soit une matrice symétrique
- (iii) Pour toute base orthonormale β de E , $[f]_\beta$ est une matrice symétrique

- Lorsque β une base orthonormale de E euclidien de dimension n , l'application $u \mapsto [u]_\beta$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- (*) THÉORÈME. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont orthogonaux.
- THÉORÈME. Si f est un endomorphisme auto-adjoint d'une espace euclidien et si F est un sous-espace stable par f alors $F^\perp$ est stable par f .

• THÉORÈME SPECTRAL

1. Tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est **diagonalisable en base orthonormale**.
2. Si A est une matrice symétrique réelle alors A est **orthogonalement diagonalisable** : il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale réelle telle que $A = {}^t P D P$.

- (*) Un exercice important. Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E , λ et μ la plus petite et la plus grande des valeurs propres de f . Démontrer que pour tout x dans E on a :

$$\lambda \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \mu \|x\|^2$$

4.2 Endomorphismes auto-adjoints positifs et définis positifs

• On dit qu'un endomorphisme auto-adjoint u d'un espace euclidien E est « positif » lorsque pour tout x dans E on a : $\langle u(x), x \rangle \geq 0$. Dans ce cas on écrit $u \in S^+(E)$.

On dit qu'un endomorphisme auto-adjoint u d'un espace euclidien E est « défini positif » lorsque pour tout x non nul dans E on a : $\langle u(x), x \rangle > 0$. Dans ce cas on écrit $u \in S^{++}(E)$.

• (*) **Une remarque essentielle.** Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \in S^{++}(E)$, alors $\varphi : (x, y) \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est un produit scalaire sur E .

• On dit qu'une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ est « positives », et on écrit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, lorsque pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^tXAX \geq 0.$$

On dit qu'une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ est « définie positives », et on écrit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, lorsque pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$X \neq 0 \Rightarrow {}^tXAX > 0.$$

• (*) **THÉORÈME.** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

1. On a l'équivalence : $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Spec}(A) \subset \mathbb{R}^+$
2. On a l'équivalence : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

4.3 Au passage

• (*) **Un exercice important.** Lorsque $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ est non nulle, sa diagonale contient un coefficient strictement positif.

• (*) **Un exercice important.** Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E , λ et μ la plus petite et la plus grande des valeurs propres de f . Démontrer que pour tout x dans E on a :

$$\lambda \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \mu \|x\|^2$$

• (*) **Un exercice important :** « Racine carrée » d'une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Il existe alors $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. On a même vu l'unicité (par diagonalisation simultanée).

• On a rencontré l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.

C'est sans doute la dernière semaine de colles en mathématiques pour les PC...