Programme de colle n° 20, semaine du 10 mars au 15 mars 2025.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Espaces euclidiens, projections orthogonales, théorème de minimisation. Pas de rappel sur le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Si possible commencer par un des exercices de la liste d'exercices actualisée

1 Rappels sur les espaces préhilbertiens réels

1.1 Produits scalaires

Soit E un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur E est une application $\langle .,. \rangle = \left(\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x,y \rangle \end{array} \right)$ qui est une forme bilinéaire, symétrique, définie-positive. Expliquons le vocabulaire :

- **Bilinéaire** : $\langle .,. \rangle$ est linéaire de chacune de ses entrées i.e. :
  - à y fixé dans E l'application $\langle ., y \rangle : x \mapsto \langle x,y \rangle$ est une forme linéaire sur E.
  - à x fixé dans E l'application $\langle x, . \rangle : y \mapsto \langle x,y \rangle$ est une forme linéaire sur E.
- **Symétrique** : pour tout (x,y) dans E^2 on a $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$.
- **Positive** : pour tout x dans E on a $\langle x,x \rangle \geqslant 0$.
- **Définie** : pour tout x dans E, $\langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

NB : pour vérifier que l'on a affaire à une forme bilinéaire symétrique, il suffit de vérifier la symétrie et la linéarité par rapport à l'une des entrées.

• Un ***espace pré-hilbertien réel*** est un couple $(E, \langle .,. \rangle)$ où E est une espace vectoriel réel et $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E. Dans un tel espace on note pour x dans E :

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}}$$

• **Les exemples fondamentaux de produits scalaires.**

1. **Le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.** Il est défini, pour X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par :
$$\langle X,Y \rangle = {}^tYX = {}^tXY.$$
2. **Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.** Pour x et y dans $\mathbb{R}^n$, en notant $X = [x]_{can}$, $Y = [y]_{can}$ les colonnes de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a :
$$\boxed{\langle x,y \rangle = {}^tYX \quad \text{et} \quad \|X\| = \sqrt{{}^tXX}}.$$
3. (*) Si $E = \mathbb{R}[X]$ alors $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
4. (*) Si $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ alors $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_{0}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
5. (*) Produit scalaire sur l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$\langle A,B \rangle = \mathrm{tr}({}^tBA).$$
Noter que ce n'est autre que « le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$ »

(*)Théorème. Inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky. *Si $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace pré-hilbertien réel alors pour tout $(x,y) \in E^2$ on a :*

$$\boxed{|\langle x,y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

• Bien comprendre le lien avec le CSB pour les intégrales. On peut noter que l'inégalité de CSB est encore valable lorsque $\langle .,. \rangle$ est seulement une forme bilinéaire symétrique positive (par contre pour que le résultat sur le cas d'égalité soit vrai, on doit avoir une forme définie).

• Angle non orienté de deux vecteurs non nuls x et y : il est définie par la relation $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$.

• **La norme euclidienne**. Elle est définie sur $(E, \langle .,. \rangle)$ espace pré-hilbertien réel par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pour tout x dans E.

Théorème. *Si $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace pré-hilbertien réel, l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes.*

1. *$\|.\|$ est une norme sur E i.e. est à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et vérifie pour tout $(x, y) \in E^2$ et λ réel :*
   — $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
   — $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
   — ***Inégalité triangulaire*** : $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
2. *Pour tout $(x, y) \in E^2$ on a : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.*
3. ***Identités de polarisation.*** *Pour tout $(x, y) \in E^2$ on a :*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

1.2 Orthogonalité

Dans ce paragraphe, $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace pré-hilbertien réel.

• Par définition, deux vecteurs x et y sont ***orthogonaux*** lorsque $\langle x, y\rangle = 0$. Lorsque $A \subset E$ est non vide, ***l'orthogonal de*** A est :

$$A^\perp = \{x \in E \mid (\forall a \in A)(\langle x, a\rangle = 0)\}$$

• On peut retenir que si a est un vecteur de E alors $a^\perp = \ker f_a$ où $a^\perp$ désigne $\{a\}^\perp$ et f_a est la forme linéaire $x \mapsto \langle a, x\rangle$.

Théorème. *Soit $A \subset E$ avec A non vide.*

1. *$E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.*
2. *(*) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*
3. *Si $A \subset B \subset E$ alors $A^\perp \supset B^\perp$.*
4. (*) Pour x dans E et F sous-espace vectoriel de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (1) $x \in F^\perp$
   (2) x est orthogonal à une partie génératrice de F.

• **Familles orthogonales.** Une famille $(v_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite ***orthogonale*** lorsque pour tout (i, j) dans I^2 tel que $i \neq j$ on a $\langle v_i, v_j\rangle = 0$.

Théorème de Pythagore. *Lorsque $(v_1, \ldots, v_k)$ est une famille orthogonale dans E on a $\left\|\sum_{i=1}^{k} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2$.*

• **Familles orthonormales**. On dit que $(v_1, \ldots, v_k)$ est une famille ***orthonormales*** de E lorsque pour tout (i, j) dans $\{1, \ldots, n\}$on a $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_i^j$.

(*) Théorème.

1. *Toute famille orthonormale est libre. (ACHTUNG : ce n'est pas le cas forcément d'une famille orthogonale).*
2. *Si $\beta = (e_1, \ldots, e_k)$ est une famille orthonormale de E alors pour tout x dans $F = vect(e_1, \ldots, e_k)$ on a :*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle\, e_i$$

autrement dit les composantes de x dans la base β de F sont les produits scalaires de x par les éléments de β.

2 Les espaces euclidiens

• Un ***espace euclidien*** est un espace pré-hilbertien réel de **dimension finie**.

(*) Théorème. *Tout espace euclidien admet une base orthonormale.*

• **Expression du produit scalaire dans une base orthonormée.**

Théorème. *Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ (tous deux décomposés dans la base β) alors on a :*

$$\boxed{\langle x, y\rangle = {}^tY X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad et \quad \|x\|^2 = {}^tX X = \sum_{i=0}^{n} x_i^2}$$

où $X = [x]_\beta$ et $Y = [y]_\beta$.

De plus, comme $x_i = \langle x, e_i \rangle$ pour tout i, on a :

$$\boxed{x = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle\, e_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle}.$$

• Cela a été l'occasion de remarquer que si E est un espace euclidien, si $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E alors la matrice de f dans β est $[f]_\beta = [\langle f(e_j), e_i \rangle]$.

3 Supplémentaire orthogonal.

• (*)Théorème. *Soient E un espace pré-hilbertien réel, F un sous-espace de* ***dimension finie*** *de E. On a :*

$$E = F \oplus F^\perp.$$

On dit que F et $F^\perp$ sont des ***supplémentaires orthogonaux****.*

• **Conséquence.** Toute famille orthonormale de E espace euclidien se complète en une base orthonormale de E.

• On peut noter que si E est un espace euclidien (DF), alors pour tout sous-espace vectoriel F de E on a : $F^{\perp\perp} = F$.

4 Projection orthogonale

• **Projection orthogonale.** Soient E un espace pré-hilbertien réel, F sous-espace de E de **dimension finie**. La ***projection orthogonale sur*** F, notée π_F, est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

• Théorème. *Avec les notations ci-dessus, pour x et y dans E on a : $y = \pi_F(x) \Leftrightarrow y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.*

En particulier : $\boxed{x = \pi_F(x) + x - \pi_F(x) \text{ selon } E = F \oplus F^\perp}$.

De plus $\boxed{\pi_{F^\perp}(x) = x - \pi_F(x)}$.

• Théorème. *Lorsque $\beta = (e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormée de F on a pour tout x dans E :* $\boxed{\pi_F(x) = \sum_{i=0}^{k} \langle x, e_i \rangle\, e_i}$.

• (*) Projection orthogonale sur une droite, un hyperplan...

• **Le théorème de minimisation**.

(*) Théorème. *Soient E un espace pré-hilbertien réel, F sous-espace de E de* ***dimension finie****. Pour tout x dans E il existe $\overline{x}$ unique dans F tel que pour tout u dans F on ait $\|x - \overline{x}\| \leqslant \|x - u\|$. De plus $\overline{x} = \pi_F(x)$. Autrement dit :*

$$\boxed{\|x - \pi_F(x)\| = \inf_{u \in F} \|x - u\|}$$

NB : $\inf\limits_{u \in F} \|x - u\|$ n'est autre que la distance entre F et x. Ce théorème affirme donc que $\mathrm{dist}(x, F)$ est atteinte en unique point de F qui est $\pi_F(x)$.

• (*) **Illustration** : pour $n \geqslant 1$ entier et $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, continue, déterminer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (f(t) - (a \cos nt + b \sin nt))^2 \, \mathrm{d}t.$$

5 Au passage

• (*) Le lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction de classe C^1.

• (*) Matrice de Gram d'une famille (voir exercice 4 de la feuille d'exercice).

• (*) Le théorème de représentation de Riesz (voir exercice 8 de la feuille d'exercice).

• (*) L'exercice 11 de la feuille d'exercice.

La semaine suivante : endomorphismes particuliers des espaces euclidiens.