Programme de colle n$^{\text{o}}$ 19, semaine du 10 mars au 15 mars 2025.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Tout sur les variables aléatoires discrètes. Nous utilisons comme outil les familles sommables mais n'avons fait aucun exercice spécifique sur le sujet, ce qui ne vous empêche pas d'en faire... Si possible commencer par un des exercices de la liste d'exercices actualisée

1 Fin sur l'espérance

1.1 Propriétés de l'espérance

THÉORÈME. *Soit $\mathcal{L}_d^1(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes qui admettent une espérance*

1. *$\mathcal{L}_d^1(\Omega)$ est un espace vectoriel : toutes combinaison linéare de variables aléatoires qui admettent une espérance admet encore une espérance. De plus, l'application $E : \mathcal{L}_d^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire « positive » (i.e. si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$) donc « croissante » (si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$).*
2. ***Domination.** Si $0 \leqslant |X| \leqslant Y$ et si Y admet une espérance alors X admet une espérance.*
3. *Si $X \geqslant 0$ et $E(X) = 0$ alors $X = 0$ presque sûrement.*

Commentaire. Nous avons démontré cela dans le cas restrictif où Ω est au plus dénombrable, ce qui a permis de rencontrer **dans ce cadre** le fait que, sous réserve de sommabilité :

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}).$$

Cette dernière égalité montre que l'espérance est une moyenne pondérée.

1.2 Espérance et indépendances

.

THÉORÈME. *Si X et Y sont des variables aléatoires réelles sur Ω, **indépendantes** et qui admettent une espérance, alors XY admet une espérance et :*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

L'énoncé se généralise par récurrence. *Lorsque $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui admettent une espérance alors le produit $\prod_{i=1}^{n} X_i$ admet une espérance et on a :*

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

2 Moment d'ordre 2

2.1 Cauchy-Schwarz

• (*)THÉORÈME *Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$.*

1. *Si X^2 admet une espérance alors X aussi.*
2. *Si X^2 et Y^2 admettent une espérance alors XY aussi et on a :*

$$E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

• Il y a égalité dans Cauchy-Schwarz si et seulement si les variables aléatoires X et Y sont presque sûrement liées.

2.2 Variance

• On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ admet une variance lorsque X admet un moment d'ordre 2 et la variance de X est alors :

$$V(X) = E\big((X - E(X))^2\big).$$

L'écart type σ_X est alors $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

• Variable centrée réduite $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$.

• THÉORÈME *Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ qui admet un moment d'ordre 2.*

1. ***Formule de König-Huygens*** *: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.*
2. *Pour α et β réels, $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$.*

2.3 Covariance

• Soient X et Y des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui admettent un moment d'ordre 2. Alors XY admet une espérance (par domination) et la covariance de X et Y est :

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big).$$

• THÉORÈME *Soient X et Y des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui admettent un moment d'ordre 2.*

1. ***Formule de König-Huygens*** *:*

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

2. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{cov}(X, Y)$.

• COROLLAIRE 1 *Soient X et Y des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui admettent un moment d'ordre 2 et qui sont* ***indépendantes****. Alors*

$$\begin{cases} \mathrm{cov}(X, Y) = 0 \\ V(X + Y) = V(X) + V(Y) \end{cases}$$

COROLLAIRE 2. *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,* ***indépendantes deux à deux*** *et qui admettent un moment d'ordre 2, alors :*

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

• Nous avons rencontré la matrice des covariances...

• **Coefficient de corrélation linéaire**. Lorsque X et Y sont deux variable aléatoires qui admettent un moment d'ordre 2 et telles que $\sigma_X > 0$ et $\sigma_Y > 0$, on pose :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

D'après Cauchy-Schwarz, $|r_{X,Y}| \leqslant 1$.

3 Compléments

3.1 Markov, Tchébycheff

(*) THÉORÈME (MARKOV). *Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire qui admet une espérance alors, pour tout $a > 0$, on a :*

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(|X|)}{a}.$$

(*) THÉORÈME (INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHÉBYSHEFF). *Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre 2, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a :*

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma(X)^2}{\varepsilon^2}.$$

3.2 Loi faible des grands nombres

• (*) THÉORÈME. (LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES.) *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires* ***indépendantes*** *de* ***même espérance*** *m et de* ***même variance*** *σ^2. On pose :*

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$: $P(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

• On a rencontré la majoration $P(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ qui provient immédiatement de l'inégalité de Tchébycheff.

• Dans le cas où les X_i suivent une loi de Bernoulli de paramètre p alors $m = p$ et $\sigma^2 = p(1-p)$ donc le résultat du théorème est : $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(|\overline{X}_n - p| \geqslant \varepsilon\right) = 0$

4 Séries génératrices

• Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $\boxed{X(\Omega) \subset \mathbb{N}}$. La fonction génératrice G_X de X est la fonction somme de la série entière $\sum P(X = n)t^n$. Autrement dit, par le théorème de transfert :

$$G_x : t \mapsto E(t^X).$$

• THÉORÈME. *Soit G_X la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$, série entière qui converge normalement sur $[-1, 1]$. En particulier :*

(1) Le domaine de définition de G_X contient $[-1, 1]$
(2) G_X est continue sur $[-1, 1]$ et C^∞ sur $]-1, 1[$.

• Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors la fonction génératrice de X est définie sur $\mathbb{R}$ et est donnée par : $G_X(t) = (pt + q)^n$.

• Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ alors la fonction génératrice de X est définie sur $\mathbb{R}$ et est donnée par : $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

• Si $X \hookrightarrow G(p)$ $(p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p)$ alors la fonction génératrice de X est définie sur $]-1/q, 1/q[$ et est donnée par : $G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$.

• THÉORÈME. *La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!} \right).$$

• THÉORÈME. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.*

(1) X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1. Dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$

(2) X admet une espérance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et il faut savoir retrouver : $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

• Noter que si la série génératrice de X est de rayon de convergence $R > 1$, X admet alors des moments de tout ordre et on a en particulier $G''_X(1) = E(X(X-1))$.

• THÉORÈME. *Soient X et Y deux variables aléatoires* ***indépendantes*** *à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur le même espace probabilisé. Alors pour tout t tel que $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ existent, on a :*

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

• (*) **Stabilité des lois de Poisson**. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

5 Au passage

• Fonctions de répartition de $\max(X_1, \dots, X_n)$ et $\min(X_1, \dots, X_n)$.

• Lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, relations :

— $P(X = n) = P(X \leqslant n) - P(X \leqslant n - 1)$.
— $P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n + 1)$.

• (*) Loi du minimum de deux variables de loi géométrique.

• (*) Transformée de Fourier, continuité de la transformée de Fourier.

Semaine suivante : projections orthogonales, théorème de minimisation, endomorphismes remarquables d'un espace euclidien, topologie des espaces vectoriels normés (ouverts, fermés, caractérisation globale de la continuité et densité) et enfin calcul différentiel.