Programme de colle n° 16, semaine du 27 janvier au 31 janvier 2025.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Séries de fonctions et séries entières. Dans l'idéal une question de cours sur les séries entières puis un exercices sur les séries de fonctions (régularité, ITT...)

1 Séries entières

1.1 Généralités

• Une série entière est série de fonction $\sum f_n$ où les fonctions f_n sont définie sur $\mathbb{C}$ et de la forme $f_n : z \mapsto a_n z^n$ avec (a_n) suite complexe. Hélas, une série entière se note $\sum a_n z^n$ ce qui peut amener à confondre avec la série numérique $\sum a_n z^n$.

• (*) Lemme d'Abel. *Soit (a_n) une suite complexe. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < |z_0|$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

• Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est :

$$R = \sup \underbrace{\{\rho \geqslant 0 \mid \text{la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}}_{=\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Noter que R existe toujours puisque $\mathcal{E}$ est non vide (contient 0).

• (*) Exemples des rayons de convergences des séries entière $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n z^n$.

• Théorème. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.*

1. *Pour tout z complexe tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*
2. *Pour tout z complexe tel que $|z| > R$ la suite $(a_n z^n)$ est non bornée, donc la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.*

• **Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence.** Lorsque $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R :

1. le disque ouvert de convergence est $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.
2. l'intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x est $]-R, R[$.

• D'après les résultats précédents, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument lorsque $|z| < R$ et diverge lorsque $|z| > R$. Lorsque $|z| = R$, tout est possible...

1.2 Détermination du rayon de convergence

• Théorème. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.*

1. *Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$*
2. *Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.*

Théorème. (Règle de d'Alembert pour les séries entières)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $R = \frac{1}{\ell}$ (avec les conventions usuelles).

• Lorsque les coefficients de la série entière $\sum a_n z^n$ s'annulent, on peut utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques. Par exemple, si on veut le rayon de convergence d'une série entière de la forme $\sum \alpha_n z^{2n}$, où les α_n sont non nuls, on regarde pour z non nul, la limite éventuelle de $\left|\frac{\alpha_{n+1} z^{2n+2}}{\alpha_n z^{2n}}\right|$ ce qui permettra éventuellement de savoir si la série numérique $\sum \alpha_n z^{2n}$ est convergente.

• Théorème. Rayon de convergence d'une somme. *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectif* R_a *et* R_b. *Alors la série entière* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *a un rayon de convergence* R *qui vérifie* $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ *avec égalité lorsque* $R_a \neq R_b$

1.3 Produit de Cauchy

• Théorème. Produit de Cauchy de séries absolument convergentes. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries absolument convergentes. Alors la série de terme général* $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ *est absolument convergente et on a :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right).$$

• **Exponentielle complexe**. Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose correctement $\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

(*) Relation $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.

• Théorème. Produit de Cauchy de séries entières. *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectif* R_a *et* R_b. *Pour tout* z *complexe tel que* $|z| < \min(R_a, R_b)$ *on a :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

• (*) Une illustration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ on a :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.$$

2 Régularité de la somme d'une série entière

2.1 Séries entière et convergence uniforme

• (*) Théorème. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *La série de fonctions* $\sum a_n x^n$ *de la variable réelle* x ***converge normalement*** *sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.*

• (*)**Égalités de Cauchy et théorème de Liouville** (exercice). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $|z| < R$ on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (fonction somme).

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et* $r \in]0, R[$ *on a :* $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta = 2\pi a_n r^n$.
(2) Si $R = +\infty$ *et si* f *est bornée, alors* f *est constante.*

2.2 Continuité de la somme

• Théorème. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$.

(1) La fonction somme de la série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ *est continue sur l'intervalle ouvert de convergence* $]-R, R[$.
(2) La fonction somme de la série entière de la variable complexe $\sum a_n z^n$ *est continue sur le disque ouvert de convergence.*

2.3 Primitives de la somme

• Théorème. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et* f *le fonction somme sur* $]-R, R[$ *de la série entière de la variable réelle* $\sum a_n x^n$.

(1) Si $[a, b]$ *est un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence* $]-R, R[$ *alors :* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n\,\mathrm{d}t$.
(2) Les primitives de f *sur* $]-R, R[$ *sont de la forme :*

$$t \mapsto k + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}.$$

• (*) Pour $x \in]-1, 1[$ on a :

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

2.4 Caractère C^∞ de la somme

• Théorème. *Soit (a_n) une suite complexe. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ ont même rayon de convergence.*

• Théorème. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et f sa fonction somme.*

(1) La fonction somme f est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ avec pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

(2) La fonction somme f est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-R, R[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}x^n.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

• Application aux « séries dérivées de la série géométrique ». Pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(n)!}{(n-k)!} x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

En particulier $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

3 Développements en série entière

3.1 Généralités

• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 dans son intérieur. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n$ de rayon de convergence $R > r$ tels que pour tout $x \in]-r, r[$ on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

• Théorème. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 dans son intérieur et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Si f est développable en série entière au voisinage de 0 alors il existe $r > 0$ telle que f est de classe C^∞ sur $]-r, r[$ et le développement en série entière de f au voisinage de 0 est :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (x \in]-r, r[).$$

*En particulier, **il y a unicité du développement en série entière**.*

• Lorsque f est de classe C^∞ au voisinage de 0, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ s'appelle la série de Taylor de f en 0. On a vu qu'il existe des fonction C^∞ qui ne sont pas développables en série entière au voisinage de 0.

3.2 Développements usuels en 0

• Pour z complexe : $\displaystyle\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

• Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

• Pour $x \in]-1,1[$, en primitivant une série géométrique, on obtient :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

• (*) Pour tout $x \in]-1,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots\end{aligned}$$

• (*) Le développement précédent s'obtient avec la « **technique de l'équation différentielle** » : on recherche une équation différentielle vérifiée par f est on suppose f développable en série entière au voisinage de 0. Cette technique permet tout aussi bien de déterminer des solutions développables en série entière d'équations différentielles.

Semaines suivante : séries entières encore puis variables aléatoires discrètes.