Programme de colle n^{o} 14, semaine du 13 janvier au 18 janvier 2025.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Il s'agit d'une colle de révision. Un des exercices de la seconde liste d'exercice pour les colles, puis un exercice de probas...Il n'y a pas de variables aléatoires mais la notation $[X = k]$ est tout à fait possible...

1 Généralités sur les probabilités

• Introduction sur les phénomènes aléatoires. Brève introduction aux trois ingrédients essentiels essentiels de la théorie des probabilités :

— L'espace des états ;
— Les événements ;
— Les (mesures de) probabilités.

Brève introduction intuitive à la notion de variable aléatoire. Retour sur l'image réciproque...

• **Tribus**. Soit Ω un ensemble. On considère les propriétés suivantes pour une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\Omega \in \mathcal{A}$.
(2) $\mathcal{A}$ est stable par complémentation : dés que $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$ où A^c désigne le complémentaire de A dans Ω.
(3) $\mathcal{A}$ est stable pour les réunions finies et les intersections finies.
(4) $\mathcal{A}$ est stable pour les réunions dénombrables et les intersections dénombrables.

On dit que $\mathcal{A}$ est une ***algèbre*** lorsqu'elle vérifie (1), (2) et (3). C'est une ***tribu*** (ou σ-algèbre) lorsqu'elle vérifie (1), (2) et (4).

• **Tribu engendrée**. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. La tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est notée $\sigma(\mathcal{C})$: c'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$ (et c'est l'intersection de toutes les tribus qui contiennent $\mathcal{C}$). La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$. La tribu des **boréliens** de $\mathbb{R}$ est en fait engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, q]$ où $q \in \mathbb{Q}$.

• Les événements de Ω sont les éléments de $\mathcal{A}$.

• **Système complet d'événements** : c'est une famille dénombrable (ou fini) $(A_i)_{i\in I}$ d'événement disjoints (deux à deux) telle que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$

• **Mesures de probabilités**. Une mesure de probabilité (ou ***probabilité***) définie sur une tribu $\mathcal{A}$ d'un espace Ω est une application $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ qui vérifie :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Pour toute suite (A_n) d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$ on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Le nombre $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'événement A. L'axiome 2 de cette définition est la propriété dite de σ-additivité.

• **Espace probabilisé** : triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où ...

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Théorème. *On a :*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. *P est additive : pour A et B disjoints dans $\mathcal{A}$ on a :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. *Une mesure de probabilité est croissante : ...*
5. Si $B \subset A$ on a $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$

6. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - (P(A\cap B)$

• **Formule de Poincaré.** Lorsque $A_1,\dots,A_n$ sont dans $\mathcal{A}$ on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i\cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i\cap A_j\cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)$$

• **Le théorème de continuité monotone**. Vocabulaire : suite croissante, décroissante dans $\mathcal{A}$...

Théorème. *Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé.*

1. « ***Continuité décroissante*** ». *Pour toute suite (A_n) décroissante dans $\mathcal{A}$ on a :* $P(A_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.
2. « ***Continuité croissante*** »*Pour toute suite (A_n) croissante dans $\mathcal{A}$ on a :* $P(A_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

Corollaire. *Pour toute suite (A_n) dans $\mathcal{A}$ on a :*

1. $P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$.
2. $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$.

• (*) ***Propriété de sous-additivité***. Lorsque (A_n) est une suite dans $\mathcal{A}$, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

• **Propriétés vraies presque sûrement**.

2 Probabilités sur un ensemble au plus dénombrable

Théorème. *Soit Ω un ensemble strictement dénombrable. On note $\Omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

1. *Une mesure de probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur les singletons.*
2. *Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Il existe une mesure de probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on ait $P(\{\omega_n\}) = p_n$ si et seulement si chaque p_n est positif et la série $\sum_{n\geqslant 0} p_n$ converge de somme 1.*

• On a bien sûr un résultat analogue avec Ω fini : adapter...

•. Soit Ω un ensemble fini. Une mesure de probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega)$ est dite uniforme, ou équirépartie, si la probabilité $P(\{\omega\})$ ne dépend pas du choix de ω dans Ω.

Théorème. *Soit Ω un ensemble fini. Il existe une seule loi uniforme sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega)$ et elle est donnée, pour $A\subset\Omega$, par :*

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

3 Probabilités conditionnelles et indépendance

3.1 Probabilités conditionnelles

• Soient A et B dans $\mathcal{A}$. La probabilité de A sachant B est, lorsque $P(B)\neq 0$:

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Théorème. *Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et B dans $\mathcal{A}$ tel que $P(B)\neq 0$. Alors P_B est une mesure de probabilités sur $\mathcal{A}$ appelé probabilité sachant B.*

• Soient A et B dans $\mathcal{A}$. On dit que A et B sont indépendants lorsque $P(A)\times P(B) = P(A\cap B)$. Si $P(B)\neq 0$ cela se traduit de suite par : $P_B(A) = P(A)$. **Bien noter que la notion d'événements indépendants dépend du choix de la mesure de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$.**

• **Evénements mutuellement indépendants.** Les événements $A_1,\dots,A_n$ dans $\mathcal{A}$ sont dits mutuellement indépendants si **pour toute partie finie** J de $\{1,\dots,n\}$ on a :

$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

Noter que les A_i peuvent être indépendants deux à deux sans être mutuellement indépendants.

• On dit qu'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{A}$ est une suite d'événements indépendants lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ les événements $A_0, \ldots, A_n$ sont indépendants.

• Les résultats essentiels sur les probabilités conditionnelles.

THÉORÈME. *Si A et B sont indépendants alors il en va de même de A et $\overline{B}$, de $\overline{A}$ et B et de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.*

THÉORÈME (**Formule des probabilités composées**). *Lorsque $A_1, \ldots, A_n$ sont dans $\mathcal{A}$ avec $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$ alors :*

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

3.2 La formule des probabilités totales

• THÉORÈME (**Formule des probabilité totales**). *Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complets d'événements. Pour tout A dans $\mathcal{A}$, on a :*

$$P(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A \cap E_n).$$

Lorsque chaque $P(E_n) \neq 0$, on a donc : $P(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_{E_n}(A) \times P(E_n)$

• Cette formule est encore valable avec un système quasi-complet d'événements.

• **Formule de Bayes.** *Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complets d'événements tels que $P(E_n) \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$, on a :*

$$P_A(E_n) = \frac{P_{E_n}(A)P(E_n)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P_{E_k}(A)P(E_k)}.$$

4 Au passage

• La magie de l'arbre de choix...

• Les coefficients binomiaux. Par définition $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Manipulation, formule de Pascal, formule sans nom :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

(*) Sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$, de plusieurs manières.

•Nombre de permutations d'une ensemble à n éléments : $n!$.

• Illustrations variées du cours de probabilités avec des choix d'urnes aléatoires avant les tirages...

• (*) Longueurs des séries en illustration.

• (*) Marche aléatoire sur un triangle (sans variable aléatoire) : voir exercice 8 de la feuille 9.

• Lemme de BOREL-CANTELLI et loi du 0/1 (de manière théorique et sur des exemples).

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose :

$$B = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

1. **Lemme de Borel-Cantelli**. Démontrer que si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge alors :
$$P(B) = 0.$$

2. **Loi du zéro-un de Borel-Cantelli**. On suppose que les événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants. Démontrer que :
$$P(B) = \begin{cases} 0 & \text{si la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(A_n) \text{ converge} \\ 1 & \text{si la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(A_n) \text{ diverge} \end{cases}.$$

Semaines suivante : pratique des probabilités (sans variable aléatoire) et séries de fonctions.