Programme de colle n° 12, semaine du 16 décembre au 20 décembre 2024.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Nous n'avons fait que de petits exercices sur les séries, ne pas hésiter à utiliser aussi le programme de colle précédent (suites de fonctions).

1 Séries

Aucun exercice n'a été traité. Mais c'est au programme de la première année...

1.1 Généralités sur les séries

• **Le vocabulaire des séries.** Pour u suite dans $K = R$ ou $\mathbb{C}$, on dit que la série $\sum u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge. Dans ce cas on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite (S_n), et cette limite s'appelle *la somme* de la série $\sum u_n$.

On dit que la série $\sum u_n$ est divergente lorsqu'elle n'est ne converge pas.

• La notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ **ne** désigne donc **pas**, malgré son nom, une somme : **c'est une limite!** Il faudra toujours assurer son existence avant de l'utiliser !

• Des exemples fondamentaux :

— (*) La série harmonique diverge.

— (*) Pour x réel la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

— Séries géométriques. Pour a complexe tel que $|a| < 1$ la série $\sum_{n\geqslant 0} a^n$ converge de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

1.2 Premières propriétés des séries.

THÉORÈME. *Soit (u_n) une suite complexe. La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge de somme $\ell - u_0$.*

THÉORÈME. *Soit (u_n) une suite complexe. Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$.*

ACHTUNG : pas de réciproque (pensez à la série harmonique). La preuve repose sur la relation **fondamentale** suivante : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \dots$

Ce théorème s'utilise pour montrer qu'une série diverge grossièrement.

THÉORÈME. *Soient (u_n) et (v_n) des suites complexes telles que les série $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors pour tout λ réel , la série de terme général $w_n = u_n + \lambda v_n$ converge de somme :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

• **Restes d'une série convergente**. On suppose que la série $\sum u_n$ converge de somme $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Le reste d'ordre n de cette série est :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $R_n = S - S_n$ (donc $R_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$) et $u_n = R_{n-1} - R_n$.

1.3 Les séries à termes positifs

Ici on ne considère que des séries à terme général dans $\mathbb{R}^+$.

• Une série $\sum u_n$ est à termes positifs lorsque pour tout n entier naturel on a $u_n \geqslant 0$. On parle alors de STP.

Théorème. *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}^+$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.*

• Comparaison des STP.

Théorème. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans $\mathbb{R}^+$ telles que pour tout n entier naturel on ait $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.*

1. ***Domination.***
   Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
2. *Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.*

NB : ce théorème est encore valable lorsque $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

Théorème. *Soient (u_n) et (v_n) des suites dans $\underline{\mathbb{R}^+}$.*

1. *Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.*
2. *Si $u_n = O(v_n)$ alors la convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $\sum u_n$.*

• Comparaison série/intégrale.

(*)Théorème. *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue, décroissante et positive. Alors la série $\sum_{k\geqslant 1} f(k)$ a même nature que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Corollaire . *Soit α réel. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Corollaire. *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}^+$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit majorée (en particulier lorsque $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$) alors la série $\sum u_n$ converge.*

1.4 Convergence absolue

• Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument lorsque la STP $\sum |u_n|$ converge.

Théorème. *Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a l'inégalité triangulaire :*

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\,.$$

(*) Démonstration pour une série réelle.

Théorème. *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit bornée (en particulier lorsque $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$) alors la série $\sum u_n$ converge absolument.*

1.5 Critère spécial des séries alternées

• (*) Théorème. *Soit (u_n) une suite de réels positifs, décroissante, qui converge vers 0. Alors la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.*
De plus :

— *« Le contrôle du reste ». En posant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$, R_n est du signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et on a $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.*

— *La « somme » $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est positive, majorée par u_0.*

• Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergente. Ce théorème ne s'utilise pas a priori pour des séries absolument convergentes.

1.6 Critère de d'Alembert

(*)Théorème.[Critère de d'Alembert] *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

- *Lorsque $\ell < 1$ la série $\sum u_n$ converge.*
- *Lorsque $\ell > 1$ la série $\sum u_n$ diverge.*

• Pour une suite (u_n) qui ne s'annule pas dans $\mathbb{K}$ en prenant les modules, on peut conclure à de l'absolue convergence.

2 Au passage

• **Les sommes de Riemann** ((*)savoir justifier la formule). Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, on a :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a vu que l'on peut rajouter des rectangles en nombre fini lorsque f est définie sur un intervalle plus grand que $[a,b]$...

Cas particulier essentiel : $a = 0$ et $b = 1$. Alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Convergence commutative pour les séries absolument convergente en exercice.

Les semaines suivantes : encore des séries puis probabilités (sans variable aléatoire) et séries de fonctions.