Programme de colle n^o 11, semaine du 9 décembre au 14 décembre 2024.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

1 Suites de fonctions

1.1 Modes de convergences

• Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$. On dit que :

— la suite (f_n) ***converge simplement*** sur X vers une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ lorsque, pour tout $x \in X$ on a :

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

On note alors $f_n \xrightarrow[X]{CS} f$.

— la suite (f_n) ***converge uniformément*** sur X vers une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ lorsque la fonction $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang n et $\|f_n - f\|_{\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On note alors $f_n \xrightarrow[X]{CU} f$.

• Noter les différences de quantification entre les deux notions.

• $f_n \xrightarrow[X]{CS} f$ si et seulement si :

$$\underline{(\forall x \in X)}(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in N)(\forall n \geqslant N)(|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon).$$

Ici N dépend du choix de x et ε.

• $f_n \xrightarrow[X]{CU} f$ si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in N)(\forall n \geqslant N)\underline{(\forall x \in X)}(|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon).$$

Ici N est indépendant du choix de x. Interprétation graphique lorsque X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et les fonctions à valeurs réelles.

• Pour montrer que $f_n \xrightarrow[X]{CU} f$ on cherche à majorer pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand $|f_n(x) - f(x)|$ par une suite (α_n) dans $\mathbb{R}$ telle que $\alpha_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour cela il est parfois judicieux d'étudier, à n fixé, la fonction f_n.

• Théorème. *Soient (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$. Si la suite de fonction (f_n) converge uniformément vers f sur X alors elle converge simplement vers f sur X i.e. : $f_n \xrightarrow[X]{CU} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[X]{CS} f$.*

• (*)Théorème. *Soient (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$. On suppose que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers f sur X. S'il existe une suite (x_n) dans X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne converge pas vers 0 alors la suite de fonction (f_n) **ne** converge **pas** uniformément vers f sur X.*

<u>Preuve</u>. On raisonne par l'absurde et on suppose que $f_n \xrightarrow[X]{CU} f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,X} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui est une contradiction.

1.2 Continuité de la limite d'une suite de fonctions

• (*)Théorème. *Ici X est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient (f_n) une suite de fonctions **continues** de X dans $\mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$. On suppose que la suite de fonction (f_n) **converge uniformément** vers f sur X. Alors f est continue sur X.*

La preuve se fait par découpe en trois.

• Ce théorème donne un nouveau moyen de montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme d'une suite de fonctions continues.

• **<u>Localisation</u>.** Le résultat de ce théorème est encore valable sous l'hypothèse : la suite de fonction (f_n) **converge uniformément** vers f sur tout segment $[a, b] \subset X$.

1.3 Interversion limite-intégrale

(*)THÉORÈME. *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions* ***continues*** *de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. On suppose que $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CU} f$. Alors :*

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour une suite de fonctions continues définies sur un segment, ce résultat est plus facile en général à mettre en œuvre que le théorème de convergence dominée...

1.4 Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions

• (*)THÉORÈME. *Ici I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient (f_n) une suite de fonctions* ***de classe*** *C^1 de I dans $\mathbb{K}$ et $f : I[a,b] \to \mathbb{K}$. On suppose que :*

> (1) *La suite de fonction (f_n)* ***converge simplement*** *vers f sur I.*
> (2) *La suite de fonction (f_n')* ***converge uniformément*** *vers une fonction h sur tout segment $[a,b] \subset I$.*

Alors la fonction f est de classe C^1 sur I avec $f' = h$.

• La conclusion est bien sûr valable lorsque l'hypothèse (2) est remplacée par $f_n' \xrightarrow[I]{CU} h$.

• Nous avons vu qu'une limite uniforme de fonction C^1 n'est pas forcément C^1, et que sous les hypothèses du théorème précédent la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset I$ vers f.

• COROLLAIRE. *Ici I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et k est un entier naturel. Soient (f_n) une suite de fonctions* ***de classe*** *C^k de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que :*

> (1) *Pour tout $i \in \{0,\dots,k-1\}$ la suite de fonctions $\left(f_n^{(i)}\right)$* ***converge simplement*** *vers une fonction φ_i sur I.*
> (2) *La suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)$* ***converge uniformément*** *vers une fonction φ_k sur tout segment $[a,b] \subset I$.*

Alors la fonction $f = \varphi_0$ est de classe C^k sur I avec, pour tout $i \in \{0,\dots,k\}$: $f^{(i)} = \varphi_i$.

2 Au passage

• Retour sur le théorème de convergence dominée.

THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE DE LEBESGUE. *Soit (f_n) une suite de fonctions, à valeurs complexes, continue par morceaux sur un intervalle I. On suppose :*

> *(H1) La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.*
> *(H2) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout n entier on ait $|f_n| \leqslant \varphi$.*

Alors la fonction f est intégrable sur I (ainsi que chaque f_n) et on a :

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

• La loi binomiale...

• Pour x réel, $\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

• (*) Quizz de la semaine : Le vrai/faux sur les suites numériques (voir dans la partie exercices)

La semaine suivante : séries numériques, puis sans doute probabilités sans variables aléatoires.