Programme de colle n^{o} 10, semaine du 2 décembre au 7 décembre 2024.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

1 Intégrales à paramètre

1.1 Introduction

• On s'intéresse ici à des fonctions $f : X \times I \to \mathbb{C}$ où X et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Lorsque pour tout x dans X la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, on peut alors considérer la fonction $g : X \to \mathbb{C}$ définie par :

$$g(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

On s'intéresse alors aux propriétés de régularité (continuité, dérivabilité,...) de ce genre de fonctions (« intégrales à paramètre »)

• Si à <u>t fixé</u> dans I, la fonction $h_t : x \mapsto f(x,t)$ est dérivable en a, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$ désigne $h_t'(a)$ i.e. la dérivée en a de h_t

1.2 Continuité

• Théorème de continuité des intégrales à paramètre. *Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$. On suppose :*

(H1) Pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est $C^0 - PM$ sur I.
(H2) Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X.
(H3) Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$(\forall x \in X)(\forall t \in I)\left(|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)\right).$$

La fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est alors définie et continue sur X.

• C'est l'hypothèse de domination $(H3)$ qui est essentielle. Lorsque cette hypothèse est encore satisfaite pour tout segment inclus dans X alors on peut conclure que f est continue sur ces segments, donc sur X.

1.3 Théorème de convergence dominée à paramètre

• Théorème de convergence dominée à paramètre. *Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$ et $\overline{a}$ une borne de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose :*

(H1) Pour $t \in I$ fixé, $\lim\limits_{x\to\overline{a}} f(x,t) = \ell(t) \in \mathbb{C}$.
(H2) Pour x fixé dans I, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont C^0PM sur I.
(H3) Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$(\forall x \in X)(\forall t \in I)\left(|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)\right).$$

La fonction ℓ est intégrable sur I et on a :

$$\lim_{x\to a} \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Ce théorème peut servir à déterminer des limites.

1.4 Dérivabilité des intégrales à paramètre

• Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre. *Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$. On suppose :*

(H1) Pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I (en particulier $C^0 - PM$).
(H2) Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur X.
(H3) La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est $C^0 - PM$ sur I, pour tout $x \in X$.
(H4) Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$(\forall x \in X)(\forall t \in I)\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\right).$$

La fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est alors de classe C^1 sur X avec :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

• C'est l'hypothèse de domination ($H4$) qui est essentielle. Lorsque cette hypothèse est encore satisfaite pour tout segment inclus dans X alors on peut conclure que f est de classe C^1 sur ces segments, donc sur X.

• Sur un intervalle d'intégration I **bornée**, **il suffit de dominer par une constante !**

• En version C^k on peut utiliser ce théorème (ou faire une récurrence avec la version C^1...)

• Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, version C^k. *Soient I et X deux intervalles de* $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$. *On suppose :*

(H1) Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur X.
(H2) Pour tout $x \in X$ et tout $j \in \{0,\dots,k-1\}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I.
(H3) Pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est $C^0 - PM$ sur I.
(H4) Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$(\forall x \in X)(\forall t \in I)\left(\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\right).$$

La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est alors de classe C^k sur X avec :

$$g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

• C'est l'hypothèse de domination ($H4$) qui est essentielle. Lorsque cette hypothèse est encore satisfaite pour tout segment inclus dans X alors on peut conclure que f est de classe C^k sur ces segments, donc sur X.

2 Au passage

• Transformée de Laplace, caractère dérivable et théorème de la valeur finale en exemples.

• (*) La fonction Γ est de classe C^1.

• Caractérisation séquentielle de la limite. *Soient I un intervalle de* $\mathbb{R}$, *a un élément de I ou une borne de I, $f : I \to \mathbb{R}$. Pour ℓ réel, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) $\lim_a f = \ell$.

(2) Pour toute suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ on a :

$$f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

• Caractérisation séquentielle de la continuité. *Soient $a \in I$ intervalle de* $\mathbb{R}$ *et $f : I \to \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) f est continue en a.
(2) *Pour tout suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$, on a : $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.*

La semaine suivante : suites de fonctions, convergence uniforme.