

---

## Programme de colle n° 9, semaine du 25 au 30 novembre.

---

### Toute la réduction

*Les points suivis d'une (\*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

## 1 Trigonalisation

Les techniques de trigonalisation ne sont pas au programme : donner toutes les indications utiles !

- Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite trigonalisable si l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $A$  est trigonalisable.

- THÉORÈME. *Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $f$  est trigonalisable
- (2)  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

La démonstration de ce théorème est non exigible.

- **Conséquence** : toute matrice de  $M_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

- Pour triangulariser une matrice, l'idée essentielle est la suivante : *partir d'une famille libre de vecteurs propres et compléter cette famille en une base*. Pour des exemples, **regarder les exercices corrigés sur la trigonalisation**.

## 2 Au passage

- (\*) Si  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $\text{tr} A^k = 0$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , alors  $A$  est nilpotente.
- (\*) Projecteurs spectraux.
- (\*) Commutant d'un endomorphisme de  $E$  ayant  $n = \dim E$  valeurs propres distinctes.
- Diagonalisation simultanée de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent.

La semaine suivante : intégrales à paramètre.