
 Programme de colle n° 8, semaine du 18 au 22 novembre.

Les points suivis d'une (*) sont à **savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».

1 Suites sur le polynôme caractéristique

Ici, E est de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$

- Lorsque χ_A est scindé i.e $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ (les x_i pouvant être égaux), alors :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n x_i.$$

- (*) Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par f divise celui de f .

- **Multiplicité des valeurs propres.** Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(f)$. La multiplicité (algébrique) de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_f . La multiplicité géométrique de λ est la dimension de $\ker(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

THÉORÈME. Si $\lambda \in \operatorname{Spec}(f)$ est de multiplicité r_λ alors :

$$\dim \ker(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \leq r_\lambda.$$

- **Conséquence** : si λ est racine de χ_f de multiplicité 1 alors l'espace propre associé est une droite.

THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors χ_f est un polynôme annulateur de f .

2 Endomorphismes diagonalisables

Ici, E est de dimension finie $n \geq 1$.

- Un endomorphisme f de E est diagonalisable lorsqu'il existe une base β de E telle que la matrice de f dans β soit diagonale. On peut noter de suite que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si E admet une base formée de vecteurs propres de f .

- THÉORÈME. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est diagonalisable.
- (ii) f admet des valeurs propres et E est somme (directe) des sous-espaces propres de f

- THÉORÈME. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui admet $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ pour valeurs propres. Les énoncés suivants sont équivalents.

- (i) f est diagonalisable
- (ii) On a : $n = \sum_{i=1}^p \dim \ker(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E)$

- THÉORÈME. Tout endomorphisme de E qui admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1.

- (*) THÉORÈME. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) f est diagonalisable
- (ii) χ_f est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.

3 Diagonalisation des matrices

- On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable lorsque l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.

Ainsi M est diagonalisable si et seulement si M est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice diagonale c'est à si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$

Diagonaliser M c'est trouver si possible P inversible, D diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = P^{-1}DP$.

THÉORÈME. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, E espace vectoriel de dimension n de base β , $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $[f]_\beta = M$. Alors M est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable.

THÉORÈME SPECTRAL. Toute matrice symétrique **réelle** est (orthogonalement) diagonalisable.

4 Polynômes annulateurs et diagonalisations

THÉORÈME. Soient E espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

THÉORÈME. Soient E espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace f -stable de E . Si f est diagonalisable alors l'endomorphisme induit par f sur F est aussi diagonalisable.

THÉORÈME. Soient E espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f . Alors f est diagonalisable si et seulement si $P = \pi = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de f .

5 Pratique de la diagonalisation

• **Les conseils généraux** sont les suivants, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E espace vectoriel de dimension n .

1. On regarde d'abord si la matrice est symétrique.
2. On regarde si le rang de la matrice est « petit ». Cela peut nous informer (théorème du rang) que 0 est valeur propre et nous donne la dimension du sous-espace propre associé.

3. On regarde s'il n'y a pas une base « évidente » dans laquelle la matrice de f est diagonale ou simple (voir les exercices pour des exemples...).
4. On cherche les valeurs propres de f . Deux techniques a priori :
 - Le polynôme caractéristique, si on peut le déterminer, ainsi que ses racines...
 - On peut regarder rapidement si on a « un polynôme annulateur » simple de f , c'est à dire une relation de la forme $f^2 - 3f + \text{Id}_2 = 0$. Les valeurs propres éventuelles de f sont **parmi** les racines de ce polynôme annulateur (ici $X^2 - 3X + 2$) : on vérifie en regardant les espace $\ker(f - \lambda \text{Id}_E)$ pour λ racine de ce polynôme annulateur.
5. Dans les deux cas on regarde ensuite les sous-espaces propres. Il faut déterminer leur dimension (et une base de chacun lorsque la matrice est diagonalisable)!!! Rappelons que *l'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égal à n .*
6. Pour une matrice, on n'oublie pas de déterminer la matrice P (et éventuellement P^{-1}) telles que $A = PDP^{-1}$ où...

6 Illustrations importantes

- (*) Diagonalisation rapide de la matrice Attila.
- (*) Diagonalisation rapide de matrices (en taille quelconque) du style :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

- (*) Diagonalisation d'une matrice 3x3 par calcul du polynôme caractéristique.
- (*) Caractérisation des endomorphismes diagonalisables de rang 1.

La semaine suivante : fin de la réduction.