Programme de colle n° 7, semaine du 12 au 16 novembre.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Cette semaine, poser l'un des exercices de la liste située en haut de la page « exercices ».
Puis une mini question de cours sur le début de la réduction et **illustration le théorème de convergence dominée**.

1 Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice

• Définition des valeurs propres, des vecteurs propres et des espaces propres d'un endomorphisme de E (dimension quelconque).
Par définition un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f lorsque $E_{f,\lambda} = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$, un vecteur propre associé à λ est un vecteur x de E, **NON NUL**, tel que : $f(x) = \lambda x$.
L'ensemble des valeurs propres de f se note $\sigma(f)$.

• On a le résultat important suivant : 0 n'est pas valeur propre de f si et seulement si f est injective. En dimension finie, on a donc l'équivalence :

$$0 \notin \sigma(f) \Leftrightarrow f \text{ est inversible.}$$

• Liens entre stabilité et valeurs propres : (*) les droites vectorielles de E stables par f sont exactement les droites engendrées par des vecteurs propres de f.

• On a vu qu'il existe des applications linéaires sans valeur propre et d'autres avec une infinité de valeurs propres (en dimension infinie).

NB : la seule technique vue pour l'instant pour déterminer le spectre d'un endomorphisme est *l'analyse/synthèse*.

• Définition des valeurs propres, des vecteurs propres et des espaces propres d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vue comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2 Quelques propriétés des sous-espaces propres

• (*) THÉORÈME. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors les sous-espaces propres éventuels de f sont en somme directe.*

• **Conséquence.** Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de f est libre. Dans ce cas, le nombre de valeurs propres est inférieur à la dimension de l'espace E.

• (*)THÉORÈME. *Si E est un espace vectoriel et si f et g dans $\mathcal{L}(E)$ commutent alors les sous-espaces propres éventuels de f sont stables par g.*

3 Polynômes d'endomorphisme

• Lorsque $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + \cdots + a_0$ on pose :
$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k = a_n f^n + \cdots + a_0 \mathrm{Id}_E$.

• THÉORÈME.

1. *A f fixé dans $\mathcal{L}(E)$, l'application $P \mapsto P(f)$ est linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$: $(aP + Q)(f) = aP(f) + Q(f)$ pour P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ et a dans $\mathbb{K}$.*
2. *Lorsque P, Q sont dans $\mathbb{K}[X]$ on a :* $\boxed{(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)}$

Ainsi deux polynômes en f commutent.

• THÉORÈME. *Pour λ dans $\mathbb{K}$ on pose $E_{f,\lambda} = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Si $x \in E_{f,\lambda}$ alors $P(f)(x) = P(\lambda)x$. En particulier, si λ est valeur propre de f alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$.*

Polynômes annulateurs

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et P dans $\mathbb{K}[X]$, on dit que P est un polynôme annulateur de f lorsque $P(f) = 0$.

(*) Théorème. *Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un polynôme annulateur non nul.*

(*)Théorème. *Les valeurs propres d'un endomorphismes f sont des racines de tout polynôme annulateur de f.*

• (*) **Utilisation des polynômes annulateurs.**

1. Si on connaît un polynôme annulateur de f avec un terme constant non nul alors f est inversible et on sait calculer f^{-1}.
2. Un polynôme annulateur de f peut servir à déterminer f^n, en utilisant la division euclidienne des polynômes.
3. Un polynôme annulateur de f peut servir à déterminer le spectre de f.

• En exercice : (*) si P est un polynôme annulateur non nul de f de degré minimal alors le spectre de f est exactement l'ensemble des racines de P.

4 Polynôme caractéristique

$$\boxed{\text{Ici, } E \text{ est de dimension finie } n \geqslant 1 \text{ et } f \in \mathcal{L}(E)}$$

• **Polynôme caractéristique d'une matrice**. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = \det(XI - A)$. Pour $n = 2$, le polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det A$. On peut montrer (on ne l'a pas formellement démontré) que χ_A est unitaire de degré n et de la forme :

$$\chi_A = X^n - (\operatorname{tr}A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A.$$

• On sait donner le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire supérieure, d'une matrice triangulaire supérieure par blocs.

• (*) Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

• **Polynôme caractéristique d'un endomorphisme**. Le polynôme caractéristique de f est le polynôme caractéristique de $A = [f]_\beta$ où β est une base quelconque de E.

Théorème. *Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique.*

• Rappels sur le théorème de d'Alembert-Gauss et quelques conséquences.

• Une matrice complexe, un endomorphisme sur un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, **admettent au moins une valeur propre**.

5 Au passage

• Pour tout x réel $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$.

•(*) Les inégalités de convexité :

— Pour tout x réel on a : $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
— Pour tout $x > -1$ on a : $\ln(1 + x) \leqslant x$.

La semaine suivante : diagonalisation.