Programme de colle n° 6, semaine du 4 au 9 novembre.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Pour cette semaine et la suivante, il s'agit d'une colle de révision. Si possible, poser l'un des exercices de la liste située en haut de la page « exercices ».
Pas de convergence dominée cette semaine

1 Généralisation

• Pour une fonction $f :]-\infty, a] \to \mathbb{C}$ on peut adapter tout ce qui a été vu.

• Soient $\overline{a} < \overline{b}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $f :]\overline{a}, \overline{b}[\to \mathbb{C}$ qui est C^0. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_{\overline{a}}^{*} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{*}^{\overline{b}} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent où $*$ est un point de $]\overline{a}, \overline{b}[$. Dans ce cas :

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\overline{a}}^{*} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{*}^{\overline{b}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a alors la « positivité » et « la croissance » de l'intégrale (pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$), la notion de convergence absolue, d'intégrabilité...

2 Compléments sur les intégrales impropres

• **Changement de variable**.

THÉORÈME. *Soient $\overline{a} < \overline{b}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $f :]\overline{a}, \overline{b}[\to \mathbb{R}$ continue , $\varphi :]\overline{\alpha}, \overline{\beta}[\to]\overline{a}, \overline{b}[$ une bijection croissante de classe C^1.*
Les intégrales impropres $\displaystyle\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{\overline{\alpha}}^{\overline{\beta}} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et de même valeur si convergence.

NB : les changements de variables (sauf ceux évidents) seront indiqués ! Il y a un énoncé analogue avec φ décroissante et un signe moins devant l'intégrale $\displaystyle\int_{\overline{\alpha}}^{\overline{\beta}} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

*Bien comprendre que l'on peut effectuer un changement de variable avec des intégrales **dont on ne connaît pas la nature** : c'est un intérêt majeur ce théorème.*

• **Intégration par parties pour les intégrales impropres.** On peut passer par les intégrales partielles...

THÉORÈME. *Soient $u :]a, +\infty[\to \mathbb{C}$, $v :]a, +\infty[\to \mathbb{C}$ des fonctions de classe C^1. Dès que deux des trois objets qui interviennent ont un sens on a :*

$$\int_a^{+\infty} u'v = \{uv\}_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} uv'.$$

NB : $\{uv\}_a^{+\infty}$ s'interprète comme $\lim\limits_{+\infty} uv - \lim\limits_{a} uv$. Cela a un sens si et seulement si les deux limites existent dans $\mathbb{C}$!

• **Fonctions de carré intégrable**.

(*)THÉORÈME. *Soient $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$, $g : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ des fonctions C^0PM telles que f^2 et g^2 sont intégrables sur $[a, +\infty[$.*

1. *Le produit fg est intégrable sur $[a, +\infty[$.*
2. *Si de plus f et g sont à valeurs réelles, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky :*

$$\left(\int_a^{+\infty} fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^{+\infty} f^2\right)\left(\int_a^{+\infty} g^2\right).$$

Variante avec I intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ à la place de $[a, +\infty[$. Retenir l'inégalité, pour a et b dans $\mathbb{C}$:

$$|ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2\right).$$

• (*) **La fonction** Γ en exercice. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$. On pose alors pour tout $x > 0$ réel :

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

(*) Pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en particulier $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout n entier naturel.

Plan d'étude d'une intégrale impropre

Pour montrer la convergence d'une intégrale impropre $\displaystyle\int_{\overline{a}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On regarde d'abord où la fonction intégrée est C^0.
2. A distance infinie (en $-\infty$ ou $+\infty$), sauf domination immédiate, on cherche $\gamma > 1$ tel que $t^\gamma f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et alors $f(t) = o(1/t^\gamma)$ ce qui démontrera l'intégrabilité de f en « $+\infty$ ».
   Pour une intégrale semi-convergente, cela ne marchera pas : on peut penser alors à faire une IPP pour monter le degré au dénominateur.
3. A distance finie, **je** conseille de chercher un équivalent (le cas des intégrales faussement impropres sera alors rapidement écarté) et on utilise les intégrales de comparaison. Pour obtenir l'équivalent, on peut avoir besoin d'un développement limité (ordre 1 souvent, 2 parfois, 3 très rarement). Savoir donc retrouver vos DL.
4. Après le premier point, et avant les deux précédents, on peut penser à un changement de variable... (en général, il sera indiqué)

3 Fonctions continues par morceaux.

• Fonctions continues par morceaux sur un segment. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux lorsqu'il existe des réels $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ tels que :

1. la restriction $f\,|_{]a_{i-1},a_i[}$ de f à chaque segment $]a_{i-1}, a_i[$ est continue ;
2. Chaque restriction $f\,|_{]a_{i-1},a_i[}$ de f à $]a_{i-1}, a_i[$ est prolongeable sur $[a_{i-1}, a_i]$ en une fonction $g_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{C}$ qui est continue.

• L'ensemble $C^0PM([a,b],\mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, ainsi toute combinaison linéaire de fonctions C^0PM est encore C^0PM.

Théorème. *Une fonction continue par morceaux* ***sur un segment*** *est bornée.*

• Extension de la définition de l'intégrale des fonctions continues pour une fonction C^0PM sur un segment. Avec les notations de la définition d'une fonction continue par morceaux ci-dessus, on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} g_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème. *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *La fonction $I_\mathbb{C} = f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C^0PM([a,b],\mathbb{C})$.*
2. *La fonction $I_\mathbb{R} = f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^0PM([a,b],\mathbb{R})$ qui est « positive » (i.e. $f \geqslant 0 \Rightarrow I(f) \geqslant 0$) donc « croissante » (i.e $f \leqslant g \Rightarrow I(f) \leqslant I(g)$).*

• Lorsque I est un **intervalle quelconque** de $\mathbb{R}$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I lorsque f est continue par morceaux **sur tout segment** de I.

• Une somme, un produit, un quotient (lorsqu'il existe) de fonctions C^0PM sur I est encore C^0PM sur I.

• Soit $I = [a, \overline{b}[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\overline{b} \in \overline{\mathbb{R}}$. Pour une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ qui est continue par morceaux sur I on peut considérer l'intégrale impropre $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$: elle sera convergente lorsque la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.
On peut de même considérer des intégrales impropres sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ de fonctions continues par morceaux. Tout ce que l'on a vu est encore valable (sauf ce qui concerne le caractère C^1 du reste intégral.)

4 Convergence simple d'une suite de fonctions

• Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$. On dit que : la suite (f_n) ***converge simplement*** sur X vers une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ lorsque, pour tout $x \in X$ on a :

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

On note alors $f_n \xrightarrow[X]{CS} f$.

• Noter la quantification pour la convergence simple :

$f_n \xrightarrow[X]{CS} f$ si et seulement si :

$$\underline{(\forall x \in X)}(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in N)(\forall n \geqslant N)(|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon).$$

Ici N dépend du choix de x et ε.

5 Convergence dominée

Pas d'exercices traités sur le sujet

• Théorème de convergence dominée de Lebesgue. *Soit (f_n) une suite de fonctions, à valeurs complexes, continue par morceaux sur un intervalle I. On suppose :*

(H1) La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.

(H2) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout n entier on ait $|f_n| \leqslant \varphi$.

Alors la fonction f est intégrable sur I (ainsi que chaque f_n) et on a :

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Sur un intervalle d'intégration I bornée, il suffit de dominer par une constante !

La semaine suivante : pratique de la convergence dominée puis réduction.