

Programme de colle n° 5, semaine du 14 octobre au 18 octobre.

Les points suivis d'une () sont à **savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Intégrales impropres et espaces vectoriels normés : dans l'idéal, un petit exercice sur chacun des sujets. Le TD sur les intégrales impropres n'a pas été fait, mais de nombreux exemples d'étude de convergence auront été traités...

1 Ce que l'on sait sur les intégrales

- Lorsque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ a été définie en première année.
- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue alors, en écrivant $f = g + ih$ avec g et h des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, les fonctions g et h sont continues (et c'est d'ailleurs une équivalence). On pose alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt + i \int_a^b h(t) dt \in \mathbb{C}.$$

- Les techniques usuelles (IPP, changement de variable, théorème fondamental, « positivité » de l'intégrale...)

2 Intégrale impropre des fonctions $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$

2.1 Généralités

- Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^0 . On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge lorsque : $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{C}$. Dans ce cas on écrit alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \ell$

Commentaires

- (1) Ne pas « calculer » avec $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ sans avoir assuré l'existence de cette limite.
- (2) Dès que l'on peut, on utilise une primitive de la fonction intégrée...

THÉORÈME. Soient $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions C^0 .

1. Si les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent alors pour tout α dans $\mathbb{C}$ l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} (f(t) + \alpha g(t)) dt$ converge.

2. L'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si pour tout $x \geq a$ réel l'intégrale impropre $\int_x^{+\infty} f(t) dt$ converge. Dans ce cas on a la relation de Chasles :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

3. (*) Si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge le reste intégral $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$ où $x \geq a$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. De plus, comme f est continue, la fonction R est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ avec $R' = -f$.

- « Positivité » donc « croissance » de l'intégrale.
- (*) **LES PICS**. Nous avons trouvé des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$, positives, telles que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f$ converge et f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- (*) Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f$ converge. Si $\exists \lim_{+\infty} f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\ell = 0$.

2.2 Le cas des fonctions continues $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, positives

THÉORÈME. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ C^0 et **positive**. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- (ii) La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Dans ce cas on a $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \sup_{x \geq a} F(x)$.

THÉORÈME. Soient f et g dans $C^0([a, +\infty[, \mathbb{R})$, C^0 et **positives**. On suppose que $0 \leq f \leq g$.

1. Si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} g$ converge alors il en va de même de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.
2. Si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge alors il en va de même de $\int_a^{+\infty} g(t) dt$.

• (*) On a vu que, si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et **positive** telle que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente de valeur 0 alors $f = 0$.

• Les intégrales de comparaison.

THÉORÈME.

1. Soit $\alpha > 0$, réel. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. Dans ce cas sa valeur est

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

2. **Intégrales de Riemann.** Soit α , réel. L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3 Convergence absolue et intégrabilité

- Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^0 . On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument lorsque l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

THÉORÈME. Soit $f : [a, +\infty \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^0 . Si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument, elle converge. Dans ce cas on a l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt.$$

(*) Démonstration de ce théorème dans le cas où f est à valeurs réelles.

- **Fonctions intégrables sur $[a, +\infty[$.** Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^0 . On dit que f est *intégrable* sur $[a, +\infty[$ lorsque l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente.

- Attention au vocabulaire : il existe des fonctions **non intégrables** sur $[a, +\infty[$ telles que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge !

THÉORÈME. Soient f et g dans $C^0([a, +\infty[, \mathbb{C})$.

- (1) Si $|f| \leq |g|$ alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f et la non intégrabilité de f implique la non intégrabilité de g .
- (2) Si $f(x) \underset{+\infty}{=} O(g(x))$ alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f .
- (3) Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ alors les fonction f et g sont simultanément intégrables sur $[a, +\infty[$, autrement dit les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ et $\int_a^{+\infty} |g(t)| dt$ ont même nature.

Rappelons que :

- $f(x) \underset{+\infty}{=} O(g(x))$ signifie qu'il existe M réel et $A \geq a$ tels que pour tout $x \geq A$ on ait : $|f(x)| \leq M |g(x)|$.
- $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ signifie qu'il existe $A \geq a$ réel et une fonction ε telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ tels que pour tout $x \geq A$ on ait : $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$.

• **Conséquence fondamentale.** Pour montrer l'intégrabilité d'une fonction C^0 $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$, on cherche $\alpha > 1$ tel que :

$$t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Dans ce cas $f(t) = O(\frac{1}{t^\alpha})$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann : $\alpha > 1$), on peut conclure, par domination, que f est intégrable. On regarde bien sûr tout d'abord si ça marche avec $\alpha = 2$!

4 Etude à distance finie

Dans la suite a et b sont des réels avec $a < b$.

4.1 Généralités

• Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, C^0 . On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt$ converge lorsque :

$$\exists \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{C}.$$

• Adapter la définition pour une fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, C^0 , **ainsi que tout ce qui va suivre.**

THÉORÈME. Soient $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions C^0 .

1. Si les intégrales impropres $\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt$ et $\int_a^{\rightarrow b} g(t) dt$ convergent alors pour tout α dans $\mathbb{C}$ l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} (f(t) + \alpha g(t)) dt$ converge.

2. L'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt$ converge si et seulement si pour tout $x \in [a, b[$ l'intégrale impropre $\int_x^b f(t) dt$ converge. Dans ce cas on a la relation de Chasles :

$$\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{\rightarrow b} f(t) dt.$$

3. Si l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt$ converge le reste intégral

$$R(x) = \int_x^{\rightarrow b} f(t) dt, \text{ où } x \in [a, b[, \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } b. \text{ De plus la fonction } R \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a, b[\text{ avec } R' = -f.$$

• **Intégrales faussement impropres.** Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Lorsque $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et admet une limite finie ℓ en b alors on peut prolonger f par continuité sur $[a, b]$ en une fonction $\tilde{f}$. Dans ce cas l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ est dite **faussement impropre** et il s'agit d'une intégrale convergente avec :

$$\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt.$$

ACHTUNG !

Les colleurs ont le droit **de sanctionner avec une cruauté extrême** toute personne qui argumenterait de la manière suivante :

« comme $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ».

Le phénomène d'intégrale faussement impropre n'a lieu qu'à **distance finie** !

4.2 Le cas des fonctions positives

THÉORÈME. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et **positive** ($a < b$ réels). L'intégrale impropre $\int_a^b f$ converge si et seulement si la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée. Dans ce cas on a $\int_a^{\rightarrow b} f = \sup_{a \leq x < b} F(x)$.

THÉORÈME. Soient f et g dans $C^0([a, b[, \mathbb{R})$, C^0 -PM et **positives**. On suppose que $0 \leq f \leq g$.

1. **Théorème de domination.** Si l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} g$ converge alors il en va de même de $\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt$.

2. Si l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt$ diverge alors il en va de même de $\int_a^{\rightarrow b} g(t) dt$.

• Intégrales de comparaison.

THÉORÈME.

1. Soit α réel. Alors l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

En particulier l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

2. (*) L'intégrale impropre $\int_0^1 \ln t dt$ converge (de valeur -1)

4.3 Convergence absolue et fonctions intégrables

• Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^0 . On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt$ converge absolument lorsque l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} |f|$ converge.

THÉORÈME. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^0 . Si l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f$ converge absolument, elle converge. Dans ce cas on a l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^{\rightarrow b} f(t) dt \right| \leq \int_a^{\rightarrow b} |f(t)| dt.$$

La semaine prochaine : intégrations (début...), et on poursuivra par la réduction.

• **Fonctions intégrables sur $[a, b[$.** Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^0 . On dit que f est *intégrable* sur $[a, b[$ lorsque l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt$ est absolument convergente.

• Pour une fonction à valeur réelle **de signe constant** alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si l'intégrale impropre $\int_a^{\rightarrow b} f(t) dt$ converge.

• Par exemple $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$.

THÉORÈME. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, f et g dans $C^0([a, b[, \mathbb{C})$.

(1) Si $|f| \leq |g|$ alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f et la non intégrabilité de f implique la non intégrabilité de g .

(2) Si $f(x) \underset{+\infty}{=} O(g(x))$ alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f .

(3) Si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ alors les fonction f et g sont simultanément intégrables sur $[a, +\infty[$, autrement dit les intégrales impropres $\int_a^{\rightarrow b} |f(t)| dt$ et $\int_a^{\rightarrow b} |g(t)| dt$ ont même nature.

COROLLAIRE. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Une fonction $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$, C^0 et **bornée** est intégrable sur $[a, b[$.

5 Au passage

• (*) Normes opérateurs en exercice (exercice 12 de la feuille correspondante).

• Calculs élémentaires de normes opérateurs.

• (*) La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ mais l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.