Programme de colle n° 4, semaine du 7 octobre au 12 octobre.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

1 Espaces vectoriels normés, poursuite du cours

1.1 Suites dans les espaces vectoriels normés

• Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, (u_n) une suite dans E et $\ell \in E$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque $\|u_n - \ell\| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon)$$

On écrit alors : $u_n \xrightarrow[+\infty]{\| \ \|} \ell$

• La notion de convergence de suite dépendait de la norme (ce ne sera pas le cas en dimension finie)

(*) Théorème.

1. *Lorsqu'une suite dans un espace vectoriel normé converge, il y a unicité de la limite.*
2. *Une suite convergente dans un espace vectoriel normé est bornée.*

• Extraction et suites extraites. Une extraction est une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante. (*) Lorsque φ est une extraction, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geqslant n$.

(*) Théorème. *Soit une suite (u_n) dans un espace vectoriel normé qui converge vers $\ell \in E$. Toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.*

• Opérations sur les limites.

Théorème. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans un espace vectoriel normé qui convergent respectivement vers $u \in E$ et $v \in E$. Alors, pour tout α et β dans $\mathbb{K}$, la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge vers $\alpha u + \beta v$.*

1.2 Normes équivalentes

• Soient $\| \ \|$ et N des normes sur un espace vectoriel E. On dit que la norme $\| \ \|$ est équivalente à la norme N lorsqu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\alpha N \leqslant \| \ \| \leqslant \beta,$$

i.e. pour tout v dans E : $\alpha N(v) \leqslant \|v\| \leqslant \beta N(v)$.

Théorème. *Lorsque $\| \ \|$ et N sont deux normes équivalentes sur E alors elles ont les même bornés et les même suites convergentes.*

• Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on peut penser à chercher une suite dans E qui converge pour une des normes et qui ne converge pas pour l'autre norme.

• (*) Sur $E = \mathbb{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ on a vu que les normes $\| \ \|_1 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f|$ et $\| \ \|_\infty : f \mapsto \displaystyle\sup_{x \in [0,1]} |f(t)|$ ne sont pas équivalentes.

Théorème. [**Admis**] *Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes i.e. si $\| \ \|$ et N sont deux normes sur E il existe deux constantes réelles **strictement positives** α et β telles que :*

$$\alpha \| \ \| \leqslant N \leqslant \beta \| \ \|.$$

2 Continuité

2.1 Généralités

• Soient $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ des espaces vectoriels normés, $a \in A \subset E$ et $f : E \to F$. On dit que f est *continue* en $a \in A$ lorsque :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,(\forall x \in A)\,(\|x - a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon)$$

La fonction f est dite *continue sur* A lorsqu'elle est continue en tout point a de A. On note $C^0(A,F)$ l'ensemble des applications continues de A dans F.

• Les applications coordonnées de $\mathbb{R}^n$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$ (avec n'importe quelle norme : elle sont équivalentes).

• **Caractérisation séquentielle de la continuité**.

(*)Théorème. *Soient* $(E,\| \ \|_E)$, $(F,\| \ \|_F)$ *des espaces vectoriels normés,* $a \in A \subset E$ *et* $f : E \to F$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) f *est continue en* a.

(2) *Pour toute suite* (x_n) *dans* A *telle que* $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a \in A$ *alors* $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

• **Opérations classiques sur les fonctions continues.**

Théorème. *Soient* $(E,\| \ \|_E)$, $(F,\| \ \|_F)$ *des espaces vectoriels normés,* $a \in A \subset E$ *et* $f : E \to F$.

1. *Toute combinaison linéaires de fonctions continues sur* A *est continue sur* A : $C^0(A,F)$ *est un sous-espaces vectoriel de* $\mathcal{F}(A,F)$.
2. *Le produit de deux fonctions continues sur* A *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est encore une fonction continue sur* A.
3. *Sous réserve d'existence, le quotient de deux fonctions continues sur* A *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est une fonction continue sur* A.
4. ***Composition.*** *Si* f *est continue, si* B *est une partie de* F *contenant* $f(A)$ *si* $g : B \to G$ *est continue où* G *est un espace vectoriel normé, alors* $g \circ f$ *est continue.*

En particulier les fonctions polynomiales et les quotients de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ (lorsque...) sont continues.

2.2 Fonction lipschitzienne

• Soient $(E,\| \ \|_E)$ et $(F,\| \ \|_F))$ deux espaces vectorielles normés, $k \geqslant 0$ réel. On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est lipschitzienne de rapport k lorsque pour tout $(x,y) \in E$ on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k \|x - y\|_E .$$

• (*) Exemples de la norme.

Théorème. *Toute fonction lipschitzienne est continue.*

2.3 Applications linéaires continues

(*) Théorème. *Soit* $f : E \to F$ *linéaire où* E *et* F *sont des espaces vectoriels normés. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) f *est continue.*

(2) f *est continue en* 0.

(3) f *est lipschitzienne.*

(4) Il existe $k \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* x *dans* E, $\|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.

3 Le cas de la dimension finie

3.1 Suites convergente dans un espace vectoriel de dimension finie

Théorème. *Soit* $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ *une base d'un espace vectoriel normé* $(E,\| \ \|)$ *de dimension finie et* (u_n) *une suite dans* E. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on écrit* $u_n = \sum_{k=1}^{p} x_k(n) e_i$. *Pour* $\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k \in E$, *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(1) La suite (u_n) *converge vers* ℓ *dans* $(E,\| \ \|)$.

(2) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, *la suite* $(x_k(n))$ *converge vers* ℓ_k *dans* $\mathbb{K}$.

3.2 Continuité en dimension finie

• Soients $(E,\| \ \|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F,\| \ \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$, $f : A \to F$. Lorsque $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F, pour tout x dans E on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i,$$

où $f_i(x)$ est la i-ième coordonnées de $f(x)$ dans β. Cela définit des applications $f_i : E \to \mathbb{K}$ appelés les composantes de f dans β, et on écrit :

$$f = (f_1, \dots, f_p).$$

• Théorème. Soient $(E,\| \ \|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F,\| \ \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$. Soient $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F « dans laquelle on écrit » on écrit $f = (f_1, \dots, f_p)$.

(1) $\lim_a f = \ell$.

(2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$*, la fonction* $f_k : E \to \mathbb{K}$ *admet pour limite* ℓ_k *en* a.

• Théorème. Soient $(E, \| \ \|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \| \ \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in A$. Soient $\beta = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F « dans laquelle on écrit » on écrit $f = (f_1, \ldots, f_p)$.

(1) f *est continue en* a.

(2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$*, la fonction* f_k *est continue en* a.

• Ce théorème est très pratique pour montrer que des fonction sont continues « par composantes ».

3.3 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

• (*) Théorème. *Soient* $(E, \| \ \|_E)$ *un espace vectoriel normé* ***de dimension finie****,* $(F, \| \ \|_F)$ *un espace vectoriel normé,* $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est continue.

• Exemples de $M \mapsto PMP^{-1}$ où P inversible (sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), de $X \mapsto AX$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

• **Applications multilinéaires**. Soient $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels. Une application $f : E_1 \times \ldots \times E_p$ est dite p-linéaire lorsque pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1, \ldots, E_p$ l'application :

$$f_i : x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

est linéaire de E_i dans F.

Théorème. *Avec les notations ci-dessus, lorsque les* E_i *sont tous de dimension finie, les application* p*-linéaires sont continues.*

• Exemple du produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$.

4 Au passage

• Négation des propriétés suivantes :

— La suite (u_n) converge vers ℓ.
— La suite (u_n) est bornée.

• Construction d'extraction par récurrence (pour candidats à des concours ++).

• Equation différentielle (ED) $y' = a(t)y$ où a est une fonction continue sur un intervalle I. La solution générale de (ED) sur un I est :

$$t \mapsto C\mathrm{e}^{A(t)}$$

où C est une constante réelle et A une primitive de a sur l'intervalle I.

• (*) Méthode de la variation de la constante pour résoudre $y' + ay = h(t)$. Expression de la solution générale même lorsque h n'est pas explicite.

La semaine prochaine : intégrations (début...), et on poursuivra par la réduction.