Programme de colle n$^{\text{o}}$ 3, semaine du 30 Septembre au 5 octobre.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

Dans l'idéal un exercice type cours sur les espaces vectoriels normés et du calcul de déterminant, pourquoi pas mélangé avec les éléments propres d'une matrice... Toute l'algèbre linéaire de première année et les compléments faits sont encore au programme...

1 Compléments sur les déterminants

• Lorsque A et B sont des matrices carrées on a :

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \, \det B.$$

Généralisation du résultat précédent avec p matrices carrées sur la diagonale.

• (*) **Le déterminant de Vandermonde**. Pour $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ on a :

$$V_{n+1}(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^n & \lambda_1^n & \cdots & \lambda_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

• (*) Déterminants tri-diagonaux et rappels sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (voir résumé plus bas).

• (*) **Déterminants de Hurwitz**. Pour $a_1, \dots, a_n$ et $b \neq c$ dans $\mathbb{K}$, calcul de :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ c & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a_n \end{vmatrix}$$

en passant par la fonction $f : x \mapsto \begin{vmatrix} a_1 - x & b - x & \cdots & b - x \\ c - x & a_2 - x & & \vdots \\ \vdots & & & b - x \\ c - x & \cdots & c - x & a_n - x \end{vmatrix}$ qui est affine.

• **Déterminant et trace d'un endomorphisme.** On rappelé que si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$ le déterminant de la matrice de f dans une base β de E ne dépend pas du choix de la base β : c'est le déterminant de f, noté $\det f$. De la même manière, la trace de $[f]_\beta$ ne dépend pas du choix de β, c'est la trace de f.

2 Espaces vectoriels normés

2.1 Généralités

• Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur E est une application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie pour tout x, y dans E et λ scalaire :

— $\|x\| \geqslant 0$
— $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
— $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
— ***Inégalité triangulaire*** : $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

• Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \| \ \|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et où $\| \ \|$ est une norme sur E.

2.2 Exemples de normes

• Sur $\mathbb{K}^n$ on a les normes usuelles suivantes ($v=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$) :

$$\|v\|_1=\sum_{k=1}^n |x_k|\,,\quad \|v\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2},\quad \|v\|_\infty=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|\,.$$

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, la norme $\|\ \|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ (dans le cas de $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, nous avons très brièvement justifié l'IT par un argument HP)

• Sur l'espace $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,on a vu les exemples de normes ($A\in E$) :

$$\|A\|_1=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}|\,,\quad \|A\|_1=\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}|^2},\quad \|A\|_\infty=\max_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}|(A)_{i,j}|\,.$$

Nous avons vu que $\|\ \|=n\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$ sont des « normes d'algèbre » sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Sur l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ on a vu les exemples de normes ($f\in E$) :

$$\|f\|_1=\int_a^b|f|\,,\quad \|f\|_2=\sqrt{\int_a^b|f|^2},\quad \|f\|_\infty=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\,.$$

La norme $\|\ \|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $(f,g)\mapsto \displaystyle\int_0^1 fg$.

• (*) Lorsque X est un ensemble non vide et $E=\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$, $f\mapsto\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|$ est une norme sur E. Bien noter que, pour l'inégalité triangulaire, on passe d'abord à la borne supérieure « à droite » :

Pour f et g dans E, on a pour tout $x\in X$:

$$|(f+g)(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|\leqslant\underbrace{\|f\|_\infty+\|g\|_\infty}_{\text{indépendant de } x},$$

donc $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.

2.3 Distance associée à une norme

• Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour $(x,y)\in E$ on pose

$$\operatorname{dist}(x,y)=\|y-x\|\,.$$

On a vu l'inégalité triangulaire pour cette distance.

• Lorsque A est une partie non vide de E, pour x dans E on définit :

$$\operatorname{dist}(x,A)=\inf_{x\in A}\operatorname{dist}(x,a).$$

2.4 Boules et Sphères

• Soient $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé, $a\in E$ et $r>0$.

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r est :
$$B(a,r)=\{x\in E\mid \operatorname{dist}(a,x)<r\}\,.$$
2. La boule fermée de centre a et de rayon r est :
$$\overline{B}(a,r)=\{x\in E\mid \operatorname{dist}(a,x)\leqslant r\}\,.$$
3. La sphère de centre a et de rayon r est :
$$S(a,r)=\{x\in E\mid \operatorname{dist}(a,x)=r\}\,.$$

• On a vu la forme des boules unités sur $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles et regardé l'allure de la « médiatrice » dans $(\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty)$.

2.5 Parties convexes d'un espace vectoriel

• Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une partie A de E est convexe lorsque pour tout $(m,p)\in A^2$ le segment d'extrémité m et p est encore dans A, ce qui se traduit par :

$$(\forall\lambda\in[0,1])\,((1-\lambda)m+\lambda p)\in A.$$

• On a remarqué que pour tout $a\in E$ on a : $(1-\lambda)a+\lambda a=a$.

(*)Théorème. *Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé.*

1. *Les boules de E sont convexes.*
2. *Une intersection de parties convexes de E est encore convexe* (point n'est besoin de norme pour cette propriété).

2.6 Parties bornées d'un espace vectoriel normé

• On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\|)$ est bornée lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ réel tel que pour tout $v \in A$ on ait : $\|v\| \leqslant M$.

• Noter que la notion de partie bornée dépend de la norme.

• On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\|)$ est bornée lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ réel tel que pour tout $v \in A$ on ait : $\|v\| \leqslant M$.

3 Au passage

• (*) **Moins de trente secondes pour résoudre un système** 2×2...

• (*) THÉORÈME. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ-BOUNIAKOWSKY. *Si* $(E, \langle ., . \rangle)$ *est un espace pré-hilbertien réel alors pour tout* $(x, y) \in E^2$ *on a :*

$$\boxed{|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

• Exemple d'opérateurs linéaires définis à l'aide d'intégrales. (*) L'exercice 3 de la feuille d'exercice 2.

•(*) Matrices de rang 1 : première question de l'exercice 4 de la feuille d'exercice 2.

• UN THÉORÈME IMPORTANT.
*Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **continue et positive**.*

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ *alors* $f = 0$ *(sur $[a, b]$).*

• **Les suite récurrentes linéaires d'ordre 2.** On considère ici une suite (u_n) dans $\mathbb{K}$ définie par la relation de récurrence pour n entier naturel

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \quad (\clubsuit)$$

où a et b sont dans $\mathbb{K}$.

Ces suites forment un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 2. Pour déterminer ces suites on considère l'équation caractéristique :

$$(EC) \quad X^2 - aX - b = 0$$

— Lorsque (EC) a deux racines **distinctes** r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ alors les suites dans $\mathbb{K}$ qui vérifient $(\clubsuit)$ sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto \alpha r_1^n + \beta r_2^n \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

— Lorsque (EC) a une racine **double** r dans $\mathbb{K}$ alors les suites dans $\mathbb{K}$ qui vérifient $(\clubsuit)$ sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto (\alpha n + \beta) r^n \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

— Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on a un cas supplémentaire. Lorsque (EC) n'a pas de solution réelle, elle admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ et alors les suites dans $\mathbb{R}$ qui vérifient $(\clubsuit)$ sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto \rho^n (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta) \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

Petit résumé de la première année sur les déterminants

1 - Déterminant des matrices carrées

• Le déterminant d'une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'obtient en développant par rapport à une colonne ou une ligne. La technique est la suivante. On note, pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en rayant la i-ème ligne et la j-ième colonne. Par exemple, le développement de $\det(A)$ par rapport à la première ligne est :

$$\det(A) = a_{1,1}\Delta_{1,1} - a_{2,2}\Delta_{1,2} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1,n}\Delta_{1,n}.$$

Pour les signes, lorsque l'on écrit un développement par rapport à une ligne ou une colonne, on retient qu'il y a des « + » sur la diagonale.

• On sait calculer **immédiatement** le déterminant d'une matrice triangulaire !

•THÉORÈME.

1. *Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :*

$$\boxed{\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ inversible} \Leftrightarrow \text{A de rang } n}$$

2. *Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a* $(\det A)(\det B) = \det(AB)$.
3. *Lorsque $A \in GL_n(\mathbb{K})$ on a* $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.
4. *Pour λ dans $\mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :* $\det(\lambda A) = \lambda^n A$

• On retrouve le fait que si $AB = 1_n$ alors A est inversible et $B = A^{-1}$ en utilisant les points 1 et 2 du théorème précédent.

2 - Déterminant d'un endomorphisme

• Soient $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$. Le déterminant de f dans β est le déterminant de la matrice $A = [f]_\beta$. Le déterminant de f dans β ne dépend pas de la base choisie : on l'appelle le déterminant de f et on le note $\det f$.

Théorème.

1. *Pour f dans $\mathcal{L}(E)$ on a :*

$$\det f \neq 0 \Leftrightarrow f \text{ inversible} \Leftrightarrow \text{f de rang } n$$

2. $(\det f)(\det g) = \det(f \circ g)$.
3. *Lorsque f est inversible on a* $\det f^{-1} = (\det f)^{-1}$.
4. *Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E alors on a pour β base de E :* $\det_\beta(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det f \det_\beta(u_1, \ldots, u_n)$

• Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme on cherche (trouve !) une base de E dans laquelle $[f]_\beta$ est « simple ».

La semaine prochaine : convergences des suites dans les espaces vectoriels normés, continuité des applications entre espaces vectoriels normés.