Programme de colle n^o 2, semaine du 23 au 27 Septembre.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

N'hésitez pas à demander les valeurs propres d'une matrice 3×3 et les sous-espaces propres associés...

Commentaires

Les étudiantes et étudiants doivent savoir comment déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire dont on donne la matrice dans un couple de base.

1 Produit d'espaces vectoriels

Lorsque $E_1, \dots, E_p$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, rappelons que $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ désigne l'ensemble :

$$\{(x_1, \dots, x_p) \mid (\forall i \in \{1, \dots, n\})(x_i \in F_i)\}.$$

On peut définir sur E une structure d'espace vectoriel de la manière suivante. Soient $X = (x_1, \dots, x_p) \in E$, $Y = (y_1, \dots, y_p) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose :

$$\begin{cases} X + Y & = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \\ \lambda X & = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \end{cases}$$

THÉORÈME. *Avec les notation ci-dessus, lorsque chaque E_i est de dimension finie, E est de dimension finie avec :*

$$\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i.$$

2 Somme directe de sous-espaces vectoriels

• Soient E un espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E (où n est un entier $\geqslant 1$). On pose :

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{k=0}^{n} F_k = \{x_1 + \cdots + x_n \mid (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p n\}$$

On dit que la somme $F = \sum_{k=0}^{p} F_k$ est **directe** et on écrit : $F = \bigoplus_{k=0}^{p} F_k = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ lorsque tout élément x de F s'écrit de manière **unique** $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$.

THÉORÈME. *Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe*

(ii) *Pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$ on a $x_1 = \ldots = x_p = 0$.*

• **Recollement de bases et dimension d'une somme directe**. Je rappelle que lorsqu'on recolle deux bases on n'obtient pas forcément une famille libre (et c'est même rarement le cas). Mais on a le résultat suivant :

THÉORÈME. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de dimension finie de E et $\beta_1, \dots, \beta_p$ des bases de $F_1, \dots, F_p$ respectivement. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

(ii) *$\beta = rec(\beta_1, \dots, \beta_p)$ est une famille libre de E.*

Théorème. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de dimension finie de E et $\beta_1, \dots, \beta_p$ des bases de $F_1, \dots, F_p$ respectivement. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ *est directe.*

(ii) $\dim \sum_{i=1}^{p} F_i = \sum_{i=1}^{m} \dim F_i$.

3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

• Théorème. *Avec les notations précédentes, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.*

• Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Lorsque $E = F \oplus G$, on dit que F et G sont **supplémentaires** dans E. Lorsque E est de dimension finie il est facile de montrer que tout sous-espace admet un supplémentaire (via le théorème de la base incomplète).

• En dimension finie on utilise le résultat suivant.

Théorème. *Soient F et G des sous-espaces de E de dimension finie. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. $E = F \oplus G$
2. $F \cap G = \{0\}$ ***et*** $\dim F + \dim G = \dim E$.

• **Projection**. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. La projection sur F parallèlement à G est l'application $p : E \to E$ définie de la manière suivante : $p(x) = f$ lorsque $x = f + g$ selon $E = F \oplus G$. On a alors (*) $p \in \mathcal{L}(E)$, (*) $\ker p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$. Enfin $p^2 = p$.

• **Projecteurs**. Un projecteur de E est un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.

(*)Théorème. *Si p est un projecteur de E alors $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$: un projecteur est la projection parallèlement à $\ker p$ sur $\operatorname{Im} p$.*

• Symétries : tout passe par $s = 2p - \operatorname{Id}$ où...

4 Sous-espaces stables

• Soient F un sous-espace de E et u dans $\mathcal{L}(E)$. On dit que F est u-stable lorsque $u(F) \subset F$. Si c'est le cas on peut alors définir correctement un élément u_F de $\mathcal{L}(F)$ en posant $u_F(x) = u(x)$ pour tout x dans F : u_F est l'endomorphisme induit par u sur F.

• (*) *Si $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, si $F_k = vect(e_1, \dots, e_k)$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ alors $[f]_\beta$ est triangulaire supérieure si et seulement si chaque F_k est f-stable.*

• Soient F et G des sous-espaces supplémentaires de E (de dimension finie $n \geqslant 1$), $f \in \mathcal{L}(E)$. On note β_1 une base de F et β_2 une base de G. Soit $\beta = rec(\beta_1, \beta_2)$ (qui est donc une base de E puisque $E = F \oplus G$). Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(i) *F et G sont f-stables.*

(ii) *La matrice de f dans β est de la forme* $[f]_\beta = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$

De plus si l'une de ces propriétés est réalisée alors $[f_F]_{\beta_1} = A$ et $[f_G]_{\beta_2} = B$.

• Généralisation du résultat précédent à une somme directe comportant plus de deux termes.

• Opérations par blocs sur les matrices (produit et somme lorsque...).

5 Similitude

• Lorsque A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on dit que A et B sont semblables et on écrit $A \sim B$ lorsqu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. La relation $\sim$ est d'équivalence.

• Si $A \sim 0$ alors $A = O_n$. Si $A \sim I_n$ alors $A = I_n$

(*)Théorème. *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases éventuellement différentes.*

• Si A et B sont semblables, elles ont même trace, même déterminant, même spectre et même rang. **On utilise ces résultats pour montrer que deux matrices <u>NE sont PAS</u> semblables**.

6 Formes linéaires et hyperplans

• Une forme linéaire sur E est un élément de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$. L'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ s'appelle le dual de E et se note autant E^*. Lorsque E est de dimension finie on a : $\dim E = \dim E^*$.
• Si E est de dimension $n \geqslant 1$, la matrice d'un forme linéaire dans un couple de base est une ligne i.e. un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
• Un **hyperplan** de E est un sous-espace vectoriel de E de codimension 1. On a le résultat suivant

Théorème. *Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$.*

1. *Une forme linéaire non (identiquement) nulle sur E est toujours surjective.*
2. (*) *Les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles.*
3. *Les supplémentaires d'un hyperplan H de E sont exactement les droites vectorielles non contenues dans H.*

• Équations d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

• Une forme linéaire particulière : la trace. Lorsque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $M = [m_{i,j}]$, on pose : $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ (c'est la somme des éléments diagonaux de M.
On définit ainsi une application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

(*)Théorème. *Soit $n \geqslant 1$ entier.*

1. *L'application* tr *est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
2. *Pour U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\mathrm{tr}(UV) = \mathrm{tr}(VU)$.*
3. *La trace est invariant de similitude : si deux matrices sont semblables, elles ont même trace.*

7 Au passage

• Injectivité et surjectivité. En particulier : (*) *si X et Y sont deux ensembles et si $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ vérifient $f \circ g = Id_Y$ alors f est surjective g est injective.*

• **Quelques rappels sur les produits scalaires.**

— Dans un espace préhilbertien réel $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, pour tout $a \in E$, $f_a : x \mapsto \langle a, x\rangle$ est une forme linéaire.
Cela peut servir notamment à montrer rapidement que si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $H = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, en tant que noyau de la forme linéaire non nulle f_a.

— **Supplémentaire orthogonal**

Théorème. *Si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien réel et si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors : $E = F \oplus F^{\perp}$.*

Avec les notations ci-dessus, on a donc $\mathbb{R}^n = H + \mathrm{vect}(a)\ldots$

• Le théorème fondamental. *Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, continue. Alors la fonction*

$$F = \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

est de classe C^1 sur I avec $F' = f$.

• Pratique de la liberté.

• On a revu comment déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire dont on connaît la matrice dans des bases données. (*) Exemple de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice Attila.

• (*) L'exercice n° 4 de la feuille d'exercice 1.

• Revoir le calcul du déterminant d'une matrice par développement selon une ligne ou une colonne. (*) Application pour déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres d'une matrice 3x3.

La semaine prochaine : fin de l'algèbre linéaire (rappels sur les déterminants…), puis certainement début des espaces vectoriels normés (normes, convergence...)