Programme de colle n$^{\text{o}}$ 1, semaine du 16 au 21 Septembre.

*Les points suivis d'une (*) sont **à savoir** par les étudiants et doivent être considérés comme des « questions de cours ».*

N'hésitez pas à demander les valeurs propres d'une matrice 3×3 et les sous-espaces propres associés...

Commentaires

Les étudiantes et étudiants doivent savoir comment déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire dont on donne la matrice dans un couple de base.

1 Les théorèmes généraux d'algèbre linéaire

Tout ce qui a été vu en première année...

• On a rappelé les notions de familles libres, génératrices et de bases d'un espace vectoriel.

• Théorème de la base incomplète. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Toute famille libre de E peut se compléter en une base de E.

• Théorème. *Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de F, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F))$ telle que $f(e_i) = v_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.* **Autrement dit, pour vérifier que deux applications linéaires sont égales, il suffit de le vérifier sur une base**.

• Noyau d'une application linéaire. Pour montrer qu'une application linéaire est injective, on montre que $\ker f = \{0\}$.

• (*)Théorème du rang. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg}(f).$$

• Théorème. *Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de **même dimension finie** et f dans $\mathcal{L}(E, F)$. On a les équivalences :*

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

• Isomorphismes.

Théorème. *Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et f dans $\mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est un isomorphisme de E sur F.
(ii) f transforme toute base de E en une base de F.

Théorème. *Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un isomorphisme de E sur F.
(ii) $\dim E = \dim F$.

2 Matrices associées à une application linéaire

Soient E et E' des espaces vectorielles sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\beta' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E'. Soit f dans $\mathcal{L}(E, E')$. La matrice de f dans le couple de bases (β, β') notée $[f]_{\beta',\beta}$ (ou $\mathcal{M}at_{\beta',\beta}(f)$) est l'élément $M = [m_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ tel que $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}\varepsilon_i$. Autrement dit la *j-ième* colonne de $[f]_{\beta',\beta}$ est la colonne des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base β'.

Théorème. *Avec les notations ci-dessus, l'application $f \mapsto \mathcal{M}at_{\beta',\beta}(f)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathcal{L}(E, E')$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Théorème.

• *Si β est une base de E et β' une base de E' alors pour $f \in \mathcal{L}(E, E')$ on a :* $\boxed{[f(x)]_{\beta'} = [f]_{\beta',\beta}[x]_\beta}$.

• *Soient E, F et G des espaces vectoriels de bases respectives β, B et b. Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ on a :* $\boxed{[g \circ f]_{b,\beta} = [g]_{b,B}[f]_{B,\beta}}$.

• *Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec β base de E et β' base de F on a :*

$$f \in \text{Isom}(E,F) \Leftrightarrow [f]_{\beta',\beta} \text{ inversible}$$

Dans ce cas : $[f]^{-1}_{\beta',\beta} = [f^{-1}]_{\beta,\beta'}$.

3 Les polynômes interpolateur de Lagrange

(*) Théorème. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$,* ***distincts deux à deux****. Pour tout $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on ait : $P(\lambda_i) = \mu_i$*

On a démontré cela par l'intermédiaire de l'isomorphisme :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) \end{pmatrix}.$$

Savoir retrouver rapidement les expressions des polynômes interpolateurs de Lagrange élémentaires.

4 Matrices de passage

• Soient β et $\beta' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases de E. La matrice de passage de β à β' est la matrice : $P = [\text{Id}_E]_{\beta,\beta'}$. Elle est construite de la manière suivante : la *j-ième* colonne de P est celle des coordonnées de ε_j dans β. La matrice P est inversible et $P^{-1} = [\text{Id}_E]_{\beta',\beta}$ est la matrice de passage de β' à β.

• (*) Caractérisation des matrices inversibles. Pour $n \neq 1$ entier, les éléments de $GL_n(\mathbb{K})$ sont exactement les matrices de passage entre bases d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

• Soient β et b des bases de E. Lorsque $f \in \mathcal{L}(E)$ on a : $\boxed{[f]_b = [\text{Id}_E]_{b,\beta}[f]_\beta[\text{Id}_E]_{\beta,b}}$.

5 Éléments propres d'une matrice

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A lorsque la matrice $A - \lambda I_n$ est singulière (i.e. non inversible). L'ensemble des valeurs propres de A se note Spec(A).
Autrement dit λ est valeur propre de A lorsqu'il existe une colonne X non nulle dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AX = \lambda X$.
Lorsque $\lambda\text{Spec}(A)$, le sous-espace $\ker(A - \lambda I_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'appelle le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

• Pour déterminer le spectre de A on peut calculer $\det(\lambda I_n - A)$ et regarder les valeurs de λ dans $\mathbb{K}$ qui annulent ce déterminant. Nous avons admis pour l'instant qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres.

6 Au passage

• Injectivité et surjectivité. En particulier : (*) *si X et Y sont deux ensembles et si $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ vérifient $f \circ g = Id_Y$ alors f est surjective g est injective.*

• Le théorème fondamental. *Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, continue. Alors la fonction*

$$F = \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

est de classe C^1 sur I avec $F' = f$.

• Pratique de la liberté.

• On a revu comment déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire dont on connaît la matrice dans des bases données. (*) Exemple de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice Attila.

• (*) L'exercice n° 4 de la feuille d'exercice 1.

• Revoir le calcul du déterminant d'une matrice par développement selon une ligne ou une colonne. (*) Application pour déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres d'une matrice 3x3.

La semaine prochaine : suite de l'algèbre linéaire (sommes directes, projecteurs et symétrie, dualité, stabilité, rappels sur les déterminants...)