Le petit point de cours fictif (6), EVN-2, une correction

1. Soient $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ des espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Énoncer deux propriétés équivalentes à la propriété « f est continue sur E ».

   Les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (1) f est continue.
   (2) f est lipschitzienne.
   (3) $(\exists M \geqslant 0)(\forall x \in E)(\|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E)$.

2. Sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ on considère les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$.
   a) Trouver une constante β telle que : $\| \ \|_1 \leqslant \beta \| \ \|_\infty$.

   Soit $f \in E$. On a : $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{|f(t)|}_{\leqslant \|f\|_\infty} \mathrm{d}t \leqslant \beta \|f\|_\infty$, avec $\beta = 1$.

   b) Les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ sont-elles équivalentes ?

   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$ on pose $g_n(t) = t^n$ de sorte que $g_n \in E$ avec : $\|g_n\|_\infty = 1$ et $\|g_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$.
   S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha \| \ \|_\infty \leqslant \| \ \|_1$, on aura alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha \leqslant \dfrac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est absurde. Les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ ne sont pas équivalentes

   c) Trouver une suite (f_n) dans E tel que pour tout $t \in]0,1]$ on a $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\|f_n\|_\infty \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction dont le graphe est donné par la figure 1 :

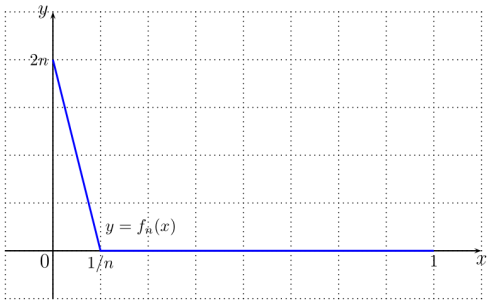


FIGURE 1 – La fonction f_n dans la sphère unité de $(E, \| \ \|_1)$

   Les trois propriétés demandées sont vérifiées.

3. **Du cours.** Soient E, F des espaces vectoriels normés , $f : E \to F$ une application continue et B une partie fermée de F. Démontrer que l'image réciproque $f^{-1}(B)$ est une partie fermée de E.

   Soit (x_n) une suite dans $A = f^{-1}(B)$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a \in E$. Par continuité de f on a donc :

$$f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a).$$

   Mais la suite $f(x_n)$ est dans B qui est une partie fermée de F, donc $f(a) \in B$ et ainsi, par définition de$f^{-1}(B)$, on a $a \in f^{-1}(B)$. En conclusion, toute suite dans $f^{-1}(B)$ qui converge dans E converge en fait dans $f^{-1}(B)$: $f^{-1}(B)$ est une partie fermée de E.

4. **Du cours.** Soient $(E, \| \ \|_E)$ un espace vectoriel normé **de dimension finie**, $(F, \| \ \|_F)$ un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que f est continue.

   Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour x dans E écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ dans la base β, on pose :

   $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.

   On a ainsi définie une norme sur E. On a alors, pour tout $x \in E$, écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$:

   $$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) \right\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \underbrace{\|f(e_i)\|_F}_{\leqslant M},$$

   où $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f(e_i)\|_F$.

   Ainsi $\|f(x)\|_F \leqslant M \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant M N_1(x)$: l'application f est M-lipschitzienne donc continue de (E, N_1) dans $(F, \| \ \|_F)$.
   Enfin $\| \ \|$ est équivalente à N_1 (car E est de dimension finie) : il existe donc $B > 0$ tel que $N_1 \leqslant B \| \ \|_E$ donc f est également lipschitzienne (donc continue) de $(E, \| \ \|_E)$ dans $(F, \| \ \|_F)$.

5. Soient $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et (M_k) une suite de matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} M$.

   a) Pourquoi n'est-il-pas besoin de préciser la norme choisie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

      Il n'est pas besoin de préciser la norme choisie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car ce dernier est un espace vectoriel de dimension finie, donc toutes les normes y sont équivalentes.

   b) Justifier que $PM_kP^{-1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} PMP^{-1}$.

      L'application linéaire $N \mapsto PN$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même est continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Ainsi, comme $M_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} M$, on a : $PM_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} PM$.

      De même $N \mapsto NP^{-1}$ est continue car linéaire en dimension finie, ce qui amène :

      $$PM_kP^{-1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} PMP^{-1}.$$

6. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. Pour $x \in A$ on pose :

   $$d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

   a) Justifier que l'on définie correctement une application $d_A : E \to \mathbb{R}$.

      Soit $x \in E$. Comme A est non vide, l'ensemble $\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$: il admet une borne inférieure.

   b) Démontrer que d_A est $1-$lipschitzienne.

      Soient x et y dans E. Pour tout $a \in A$ on a :

      $$d_A(x) \leqslant \|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\|.$$

      Ainsi, pour tout $a \in A$ on a : $\underbrace{d_A(x) - \|x - y\|}_{\text{indépedant de } a} \leqslant \|y - a\|$, donc (la borne inférieure étant le plus grand des minorants) : $d_A(x) - \|x - y\| \leqslant d_A(y)$.
      Il en résulte que : $d_A(x) - d_A(y) \leqslant \|x - y\|$ (♣).

      En permutant les rôles de x et y on obtient : $d_A(y) - d_A(x) \leqslant \|x - y\|$ (♣♣).
      Avec (♣) et (♣♣), il vient :

      $$|d_A(x) - d_A(y)| \leqslant \|x - y\|.$$