Le petit point de cours fictif (6), EVN-2, 20 minutes

1. Soient $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ des espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Énoncer deux propriétés équivalentes à la propriété « f est continue sur E ».

2. Sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ on considère les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$.
   a) Trouver une constante β telle que : $\| \ \|_1 \leqslant \beta \| \ \|_\infty$.

   b) Les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ sont-elles équivalentes ?

   c) Trouver une suite (f_n) dans E tel que pour tout $t \in]0,1]$ on a $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\|f_n\|_\infty \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3. **Du cours.** Soient E, F des espaces vectoriels normés , $f : E \to F$ une application continue et B une partie fermée de F. Démontrer que l'image réciproque $f^{-1}(B)$ est une partie fermée de E.

4. **Du cours.** Soient $(E, \| \ \|_E)$ un espace vectoriel normé **de dimension finie**, $(F, \| \ \|_F)$ un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que f est continue.

5. Soient $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et (M_k) une suite de matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

   a) Pourquoi n'est-il-pas besoin de préciser la norme choisie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

   b) Justifier que $PM_kP^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} PMP^{-1}$.

6. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. Pour $x \in A$ on pose :

$$d_A(x) = \inf_{a\in A} \|x - a\| .$$

   a) Justifier que l'on définie correctement une application $d_A : E \to \mathbb{R}$.
   b) Démontrer que d_A est $1-$lipschitzienne.