Le petit point de cours fictif (5), EVN1, 15 minutes

Dans la suite $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé.

1. Qu'est-ce qu'une norme sur E ?

   Une norme sur E est une application $\| \| : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie pour tout x, y dans E et λ scalaire :
   - $\|x\| \geqslant 0$
   - $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
   - ***Inégalité triangulaire*** : $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

2. Dans cette question, X est un ensemble non vide et $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{C}$ et on pose, pour $f \in E$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| .$$

   Démontrer que $\| \|_\infty$ est une norme sur E.

   • Comme X est non vide, pour f dans E l'ensemble $\{|f(x)| \mid x \in X\}$ est une partie non vide et majorée (puisque f est bornée) de $\mathbb{R}$ donc $\|f\|_\infty$ est bien un réel (positif).

   • Pour f dans E on a les équivalences :

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in X)(|f(x)| = 0) \Leftrightarrow f = 0.$$

   • Pour f dans E, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in X$ on a $|\lambda f(x)| = |\lambda|\,|f(x)|$. En passant au sup on obtient :

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty .$$

   • Pour f et g dans E, on a pour tout $x \in X$:

$$|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \underbrace{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}_{\text{indépendant de } x},$$

   donc $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants.

3. Dans cette question, $a < b$ dans $\mathbb{R}$, E est l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Pour f dans E on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| .$$

   Démontrer que $\| \|_1$ est une norme sur E.

• Soit f dans E. Comme $|f|$ est continue sur $[a,b]$ et positive, $\|f\|_1$ est bien définie et positive, par »positivité de l'intégrale ».

• Soit $f \in E$. Si $f = 0$ alors on a bien $\|f\|_1 = 0$ et si $\|f\|_1 = 0$, comme $|f|$ est **continue et positive** sur $[a,b]$ on a $f = 0$ sur $[a,b]$.

• Pour f dans E, $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)| \, \mathrm{d}t = |\lambda| \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t = |\lambda| \, \|f\|_1 .$$

• Pour f et g dans E, on a pour tout $t \in [a,b]$: $|(f+g)(t)| = |f(t)+g(t)| \leqslant |f(t))|+|g(t)|$. Par « croissance » et linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

4. Démontrer l'unicité de la limite pour une suite (x_n) convergente dans E.

Supposons qu'une (u_n) dans $(E, \| \, \|)$ converge vers ℓ et λ dans E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors :

$$\|\ell - \lambda\| \leqslant \|\ell - u_n + u_n - \lambda\| \leqslant \|\ell - u_n\| + \|u_n - \lambda\| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, par sandwich, $\|\ell - \lambda\| = 0$ et $\ell = \lambda$.

5. Démontrer qu'une suite (x_n) dans E qui converge est bornée.

Supposons qu'une (u_n) dans $(E, \| \, \|)$ converge vers ℓ. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $\|u_n - \ell\| \leqslant 1$ et alors pour $n \geqslant N$ on a :

$$\|u_n\| = \|u_n - \ell + \ell\| \leqslant \|u_n - \ell\| + \|\ell\| \leqslant 1 + \|\ell\| .$$

Puis posons $R = \max\{\|u_0\|, \ldots, \|u_N\|, 1 + \|\ell\|\}$. On a alors $u_n \in B_f(\ell, R)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (u_n) est bornée.

6. Soit $A \subset E$. Qu'est ce que l'adhérence de A dans E ? Comment la note-t-on ?

L'adhérence de A dans E, noté $\overline{A}$ est l'ensemble des points de E qui sont limites de suites d'éléments de A.

7. Qu'est-ce qu'une partie fermée de E ?

On dit qu'une partie Ade E est (séquentiellement) fermé dans E lorsque $\overline{A} = A$.

8. Qu'est-ce qu'une partie dense dans E ?

On dit que $A \subset E$ est dense dans E lorsque $\overline{A} = E$ i.e. lorsque tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.

9. Soient $a \in A \subset E$ et $f : A \to F$ où F est un espace vectoriel normé. Donner la caractérisation séquentielle de la continuité de f en $a \in A$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *f est continue en a.*
(2) *Pour toute suite (x_n) dans A telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a \in A$ alors $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.*