Le petit point de cours fictif (5), EVN-1, 15 minutes

Dans la suite $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé.

1. Qu'est-ce qu'une norme sur E ?

2. Dans cette question, X est un ensemble non vide et $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{C}$ et on pose, pour $f \in E$:
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| .$$
Démontrer que $\| \|_\infty$ est une norme sur E.

3. Dans cette question, $a < b$ dans $\mathbb{R}$, E est l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Pour f dans E on pose :
$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| .$$
Démontrer que $\| \|_1$ est une norme sur E.

4. Démontrer l'unicité de la limite pour une suite (x_n) convergente dans E.

5. Démontrer qu'une suite (x_n) dans E qui converge est bornée.

6. Soit $A \subset E$. Qu'est ce que l'adhérence de A dans E ? Comment la note-t-on ?

7. Qu'est-ce qu'une partie fermée de E ?

8. Qu'est-ce qu'une partie dense dans E ?

9. Soient $a \in A \subset E$ et $f : A \to F$ où F est un espace vectoriel normé. Donner la caractérisation séquentielle de la continuité de f en $a \in A$.