Le petit point de cours fictif (4), AL-4,20 minutes

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Qu'est-ce qu'une forme linéaire sur E ?

   Une forme linéaire sur E est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

2. Démontrer qu'une forme linéaire sur E est soit nulle, soit surjective.

   Soit f une forme linéaire sur E, c'est à dire un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On sait que $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, qui est de dimension 1. Ainsi on a l'alternative suivante :
   - ou bien $\dim \operatorname{Im} f = 0$ et alors f est la forme nulle ;
   - ou bien $\dim \operatorname{Im} f = 1$ et alors $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}$ donc f est surjective.

3. On suppose ici que E est de dimension finie $n \geqslant 1$.
   a) Démontrer que si f est une forme linéaire non nulle sur E alors $\ker f$ est un hyperplan de E..

      Le théorème du rang affirme que $\dim \ker f = \dim E - \operatorname{rg} f$. Mais f n'est pas la forme nulle donc $\operatorname{rg} f = 1$. Il en résulte que $\dim \ker f = n - 1$: $\ker f$ est un hyperplan de E.

   b) Démontrer que si H est un hyperplan de E alors H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E..

      Soit H un hyperplan de E. On considère une base $(e_1, \ldots, e_{n-1}$ de H que l'on complète en une base $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On définit alors correctement une application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ en posant :

      $$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$$

      Cette application f est une forme linéaire non nulle sur E. Son noyau qui est de dimension $n-1$ contient $\operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_{n-1}) = H$ donc, par égalité des dimensions $H = \ker f$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Justifier que $f : x \mapsto \det(A - xJ)$ est une fonction polynomiale de degré 1.

   Soit $x \in \mathbb{K}$ et soit B la matrice obtenue à partir de $A - xJ$ en faisant les opérations suivantes sur les colonnes de $A - xJ$: $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$. La première colonne de B est celle de $A - xJ$ et les autres colonnes de B ne contiennent plus la variable x. Comme $\det(A - xJ) = \det B$, en développant ce dernier déterminant selon la première colonne, il ne reste plus qu'une somme de fonctions polynomiales de degré 1.

5. Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

   $$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Pour $n \geqslant 1$ entier, on désigne par Δ_n le déterminant de A_n.

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.

Soit $n \geqslant 1$ entier. On développe Δ_{n+2} selon la première ligne pour obtenir :

$$\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n-1} - (-1)D$$

où D est un déterminant d'ordre $n+1$ que l'on développe selon la première colonne pour obtenir $D = (-1)\Delta_n$, d'où le résultat.

b) Déterminer Δ_n en fonction de n..

L'équation caractéristique de la suite récurrente linéaire obtenue est : $r^2 - 2r + 1 = 0$. Il y a une racine double $r = 1$ donc il existe α et β dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ait :

$$\Delta_n = (\alpha n + \beta)r^n = \alpha n + \beta.$$

Comme $\Delta_1 = 2$ et $\Delta_2 = 4 - 1 = 3$ il vient :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

ce qui donne de suite $\alpha = 1 = \beta$.

6. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ distincts dans $\mathbb{K}$ et $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^n & \lambda_1^n & \ldots & \lambda_n^n \end{vmatrix}$.

a) Quelle est la valeur de $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$?.

On a $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$ (encore valable lorsque les λ_i ne sont pas distincts deux à deux !).

b) Démontrer le résultat ci-dessus..

On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante : « Dès que $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ distincts dans $\mathbb{K}$ on a $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$ ».

— La propriété $\mathcal{P}_1$ est clairement vraie.

— On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$.
Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$ distincts dans $\mathbb{K}$. En développant pour $x \in K$ le déterminant $V_{n+2}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, x)$ selon la dernière colonne, on voit que $x \mapsto V_{n+2}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, x)$ est une fonction polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$. Mais cette fonction polynôme admet $n+1$ racines distinctes qui sont $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ et ainsi :

$$V_{n+2}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, x) = V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \prod_{0 \leqslant i \leqslant n} (x - \lambda_i).$$

On évalue en λ_{n+1} pour avoir le résultat en utilisant le fait que $\mathcal{P}_n$ est vraie.