Le petit point de cours fictif (4), AL-4,20 minutes

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Qu'est-ce qu'une forme linéaire sur E ?

2. Démontrer qu'une forme linéaire sur E est soit nulle, soit surjective.

3. On suppose ici que E est de dimension finie $n \geqslant 1$.
   a) Démontrer que si f est une forme linéaire non nulle sur E alors $\ker f$ est un hyperplan de E.

   b) Démontrer que si H est un hyperplan de E alors H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Justifier que $f : x \mapsto \det(A - xJ)$ est une fonction polynomiale de degré 1.

5. Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Pour $n \geqslant 1$ entier, on désigne par Δ_n le déterminant de A_n.

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.

b) Déterminer Δ_n en fonction de n.

6. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ distincts dans $\mathbb{K}$ et $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^n & \lambda_1^n & \ldots & \lambda_n^n \end{vmatrix}$.

a) Quelle est la valeur de $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$?

b) Démontrer le résultat ci-dessus.