Le petit point de cours fictif (3), AL-3, une correction

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E. Donner la définition de l'expression « la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe » et donner une propriété équivalente à cette expression.

   • La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe lorsque tout élément x de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ s'écrit de manière **unique** $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec chaque $x_i \in F_i$.

   • La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E$, on a : $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

2. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$.
   a. Soit F un sous-espace de E. Donner la signification de : F est g-stable.

      L'expression « F est g-stable » signifie que $g(F) \subset F$ i.e. $(\forall x \in F)(g(x) \in F)$.

   b. Soit λ un réel. On note $E_{f,\lambda} = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. On suppose que f et g commutent, c'est à dire vérifient : $f \circ g = g \circ f$. Démontrer que $E_{f,\lambda}$ est g-stable.

      Soit $x \in E_{f,\lambda}$. Montrons que $g(x) \in E_{f,\lambda}$. On a :

      $$\begin{aligned}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)(g(x)) &= f \circ g(x) - \lambda g(x) \\ &= g \circ f(x) - \lambda g(x) \\ &= g(f(x) - \lambda x) \\ &= g(0_E) = 0_E\end{aligned}$$

      Ainsi $g(x) \in E_{f,\lambda}$. Ceci étant vrai pour tout x dans $E_{f,\lambda}$, le sous-espace $E_{f,\lambda}$ est g-stable.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}.$$

   Donner en justifiant un sous-espace de dimension 1 et un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}_2[X]$ qui sont f-stables et supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

   • Si $F = \mathrm{vect}(1, X)$ alors F est un sous espace de dimension 2 de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est f-stable. En effet, soit $P \in F$. On peut écrire $P = \alpha + \beta X$ où α et β sont des réels. On a alors :

   $$\begin{aligned}f(P) &= \alpha f(1) + \beta f(X) = \alpha(1 - X) + \beta(3 + X) \\ &= (\alpha + 3\beta) + (\beta - 3\alpha)X \in \mathrm{vect}(1, X)\end{aligned}$$

   • Comme $f(X^2) = \sqrt{\pi}\, X^2$, $\mathrm{vect}(X^2)$ est est un sous espace de dimension 1 de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est f-stable.

4. Dans cette question E est de dimension finie $n \geqslant 1$ et p est un projecteur de E de rang $r \geqslant 1$. Justifier qu'il existe une base β de E telle que la matrice de f dans β est :

   $$[p]_\beta = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{n-r,r} \\ \hline 0_{r,n-r} & 0_{n-r} \end{array}\right),$$

   où I_r est la matrice identité d'ordre r, et $0_{s,q}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,q}(\mathbb{K})$.

Comme p est un projecteur de E, $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$. On prend alors une base β_1 de $\operatorname{Im} p$ et une base β_2 de $\ker p$ et on note $\beta = rec(\beta_1, \beta_2)$. La famille β est une base de E puisque $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ et la matrice $[p]_\beta$ est de la forme souhaitée car $\operatorname{Im} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p.

5. Soient $n \geqslant 1$ entier, $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels distincts et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$f(P) = \big(P(\lambda_0), \ldots, P(\lambda_n)\big).$$

a) Démontrer que f est un isomorphisme linéaire.

• f est linéaire : ...

• Si $P \in \ker f$ alors $f(P) = 0$, donc $P(\lambda_0) = \ldots = P(\lambda_n) = 0$ et ainsi P **admet** $n+1$ **racines distinctes**. Comme $\deg P \leqslant n$, il vient $P = 0$.

• D'après ce qui précède, f est une application linéaire injective entre **deux espaces de même dimension finie** $n+1$: elle est surjective.
On peut conclure que f est un isomorphisme linéaire.

b) Pour $\mu_0, \ldots, \mu_n$ réels, justifier de l'existence d'un unique polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ on ait : $P(\lambda_i) = \mu_i$.

Comme f est une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$, qui est un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$, admet un unique antécédent P par f.

c) Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on pose $L_i = f^{-1}(e_i)$ où $(e_0, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Donner pour tout $(i, j) \in \{0, \ldots, n\}^2$ la valeur de $L_i(\lambda_j)$ et justifier que $\beta = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $(i, j) \in \{0, \ldots, n\}^2$. Comme $f(L_i) = e_i$ on a : $L_i(\lambda_j) = \delta_i^j$ (symbole de Kronecker)
• La famille β est l'image de la base canonique de de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui est un isomorphisme linéaire : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base β.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On écrit $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i$ où les α_i sont réels.
Pour $j \in \{0, \ldots, n\}$, on évalue P en λ_j :

$$P(\lambda_j) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(\lambda_j) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \delta_i^j = \alpha_j.$$

On a donc $P = \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i) L_i$.

e) On note $can = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de passage de β à can.

La matrice de passage de β à can est $[\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}]_{\beta, can}$, c'est à dire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base can dans la base β.
D'après la question précédente, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ on a : $X^k = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^k L_i$. La matrice cherchée est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \cdots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$