Le petit point de cours fictif (2), AL-2, 20 minutes

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E. Donner la définition de l'expression « la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe » et donner une propriété équivalente à cette expression.

2. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$.
   a. Soit F un sous-espace de E. Donner la signification de : F est g-stable.

   b. Soit λ un réel. On note $E_{f,\lambda} = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. On suppose que f et g commutent, c'est à dire vérifient : $f \circ g = g \circ f$. Démontrer que $E_{f,\lambda}$ est g-stable.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}.$$
   Donner en justifiant un sous-espace de dimension 1 et un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}_2[X]$ qui sont f-stables et supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Dans cette question E est de dimension finie $n \geqslant 1$ et p est un projecteur de E de rang $r \geqslant 1$. Justifier qu'il existe une base β de E telle que la matrice de f dans β est :
$$[p]_\beta = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{n-r,r} \\ \hline 0_{r,n-r} & 0_{n-r} \end{array}\right),$$
   où I_r est la matrice identité d'ordre r, et $0_{s,q}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,q}(\mathbb{K})$.

5. Soient $n \geqslant 1$ entier, $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels distincts et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$f(P) = \big(P(\lambda_0), \ldots, P(\lambda_n)\big).$$

a) Démontrer que f est un isomorphisme linéaire.

b) Pour $\mu_0, \ldots, \mu_n$ réels, justifier de l'existence d'un unique polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ on ait : $P(\lambda_i) = \mu_i$.

c) Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on pose $L_i = f^{-1}(e_i)$ où $(e_0, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Donner pour tout $(i, j) \in \{0, \ldots, n\}^2$ la valeur de $L_i(\lambda_j)$ et justifier que $\beta = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base β.

e) On note $can = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de passage de β à can.