Le petit point de cours fictif (2), AL-2

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Énoncer avec précision le théorème du rang.

   Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ avec E de dimension finie. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ on a :

   $$\dim E = \mathrm{rg} f + \dim \ker f.$$

2. Soient A la matrice pleine de 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker f$.

   La matrice A est de rang 1 donc (théorème du rang), $\ker f$ est de dimension $n-1$. En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, comme $C_1 = C_2 = \cdots = C_n$, on a, pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $f(e_1 - e_i) = 0$.
   Mais la famille $(e_1 - e_i)_{i \in \{2,\dots,n\}}$ est libre, donc :

   $$\ker f = \mathrm{vect}(e_1 - e_i)_{i \in \{2,\dots,n\}}.$$

   Enfin $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{vect}(f(e_1))$, où :

   $$f(e_1) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

3. Soient F et G des sous-espaces de E. Quand peut-on parler de projection sur F parallèlement à G ? Définir alors cette application.

   • On peut définir la projection sur F parallèlement à G lorsque $E = F \oplus G$.

   • Tout élément x de E s'écrit de manière unique $x = y_x + z_x$ où $y_x \in F$ et $z_x \in G$. La projection sur F parallèlement à G est alors l'application $\pi : E \to E$ définie par $\pi(x) = y_x$.

4. a. Qu'est-ce qu'un projecteur de E ?

   Un projecteur de E est un endomorphisme f de E tel que $f \circ f = f$.

   b. Soit p un projecteur de E. Que pouvez-vous dire ? (on démontrera les assertions énoncées)

   • On a $\boxed{E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p}$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\ker p$.

   • Démontrons $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p$ par *analyse/synthèse.*

   Analyse. Supposons que $E = \mathrm{Im}\, p + \ker p$. Soit x dans E. On peut alors écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Ainsi :

   $$p(x) = p(y) + p(z) = p(y).$$

   Comme $y \in \mathrm{Im}\, p$, il existe x' dans E tel que $y = p(x')$. Il vient alors :

   $$p(x) = p(y) = p(p(x')) = p^2(x') = p(x'),$$

   puisque $p^2 = p$. Il en résulte que : $(\spadesuit)$ $\begin{cases} y = p(x) \\ z = x - p(x) \end{cases}$.

   Synthèse. Soit x dans E. on définit y et z par $(\spadesuit)$. On a alors :

   $$\begin{cases} x = y + z \\ y = p(x) \in \mathrm{Im}\, p \\ p(z) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0 \ \text{ donc } \ z \in \ker p \end{cases}.$$

   Il en résulte que $E = \mathrm{Im}\, p + \ker p$ et même $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p$, puisque d'après $(\spadesuit)$, la décomposition est unique.

5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'image et le noyau de f (on donnera une base de chacun de ces espaces).

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et C_1, C_2, C_3 les colonnes de A.

• Comme $C_1 = -C_3$, on a $\operatorname{rg}(A) \leqslant 2$, mais C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles, donc $\operatorname{rg}(A) = 2$.
Il en résulte (théorème du rang) que $\ker f$ est dimension 1. Mais $C_1 = -C_3$ donc :

$$\ker f = \operatorname{vect}(e_1 + e_3),$$

et le vecteur $e_1 + e_3$ constitue une base de $\ker f$.

• On a vu que $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2 et on sait que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$.
Mais $f(e_3) = -f(e_1)$ puisque $C_1 = -C_3$. Il vient alors : $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}\big(f(e_1), f(e_2)\big)$.
Or $f(e_1) = e_1 - 2e_2 - 3e_3$ et $f(e_2) = 2e_2$. Une base de $\operatorname{Im} f$ est donc : $\beta = (e_1 - 2e_2 - 3e_3, e_2)$.

6. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donne rune propriété équivalente à : « A et B sont semblables »

Les matrices « A et B sont semblables » si et seulement si « **elles représentent le même endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension** n ».
Plus précisément, A et B sont semblables si et seulement si il existe un espace vectoriel E de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et deux bases β et β' de E telles que :

$$A = [f]_\beta \quad \text{et} \quad B = [f]_{\beta'}.$$

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
   (a) Démontrer que l'on peut écrire $A = CL$ avec $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Comme A est de rang 1, elle possède une colonne C qui est non nulle et toutes ses autres colonnes sont proportionnelles à C. Si on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A, il existe donc $y_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = y_i C$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
On pose alors $L = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et on a $A = CL$.

   (b) Démontrer que A est semblable à une matrice B de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Comme $\operatorname{rg}(A) = 1$ on a (théorème du rang) $\dim \ker f = n - 1$. On complète une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $\ker f$ en une base β de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de f dans cette base est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi $A \sim B$