Le petit point de cours fictif (2), AL-2, 20 minutes

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Énoncer avec précision le théorème du rang.

2. Soient A la matrice pleine de 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

3. Soient F et G des sous-espaces de E. Quand peut-on parler de projection sur F parallèlement à G ? Définir alors cette application.

4. a. Qu'est-ce qu'un projecteur de E ?

   b. Soit p un projecteur de E. Que pouvez-vous dire ? (on démontrera les assertions énoncées)

5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'image et le noyau de f (on donnera une base de chacun de ces espaces).

6. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner une propriété équivalente à : « A et B sont semblables »

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
   (a) Démontrer que l'on peut écrire $A = CL$ avec $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

   (b) Démontrer que A est semblable à une matrice B de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.