Le petit point de cours (1), AL-1, 20 minutes, une correction

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Énoncer avec précision le théorème du rang.

   Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ avec E de dimension finie. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ on a :
   $$\dim E = \mathrm{rg} f + \dim \ker f.$$

2. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E. Donner la définition de l'expression « la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe » et donner une propriété équivalente à cette expression.

   • La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe lorsque tout élément x de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ s'écrit de manière **unique** $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec chaque $x_i \in F_i$.

   • La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E$, on a : $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

3. Soient A la matrice pleine de 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker f$.

   La matrice A est de rang 1 donc (théorème du rang), $\ker f$ est de dimension $n-1$. En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, comme $C_1 = C_2 = \cdots = C_n$, on a, pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $f(e_1 - e_i) = 0$.
   Mais la famille $(e_1 - e_i)_{i \in \{2,\dots,n\}}$ est libre, donc :
   $$\ker f = \mathrm{vect}(e_1 - e_i)_{i \in \{2,\dots,n\}}.$$
   Enfin $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{vect}(f(e_1))$, où :
   $$f(e_1) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

4. Soit $n \geqslant 2$ entier. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \dots & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   La matrice $B = A + I$ est de rang 1 donc -1 est valeur propre de A de multiplicité géométrique $n-1$ (théorème du rang). Puisque toutes les colonnes de B sont égales, une base de $\ker(A+I)$ est donnée par la famille $(E_1 - E_2, E_1 - E_3, \dots, E_1 - E_{n-1})$ où $(E_1, \dots, E_b)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Enfin si U est le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 on a $AU = (1 + 2(n-1))U$, donc $2n-1$ est la dernière valeur propre et l'espace propre associé est $\mathrm{vect}(U)$

5. Soient $p \geqslant 2$ entier et f un endomorphisme de E qui vérifie $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que la famille $\beta = (a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ soit libre.

Comme f^{p-1} n'est pas l'application nulle, il existe $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0_E$.
Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}$ dans $\mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(a) = 0_E. \qquad (\spadesuit)$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que $\alpha_k \neq 0$. Alors l'ensemble $\{\ell \in \{0, \ldots, p-1\} \mid \alpha_\ell \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$: il admet un plus petit élément que l'on note m.
La relation ($\spadesuit$) devient alors :

$$\alpha_m f^m(a) + \alpha_{m+1} f^{m+1}(a) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(a) = 0_E.$$

On applique f^{p-1-m} (NB : $p - 1 - m \in \mathbb{N}$) pour obtenir : $\alpha_m f^{-1}(a) = 0_E$ et comme $f^{p-1}(a) \neq 0_E$ il vient $\alpha_m = 0_{\mathbb{K}}$ ce qui est absurde.

Il en résulte que la famille β est libre.