Le petit point de cours (1), AL-1, 20 minutes

Le 15 septembre 2026. **15 minutes sans calculette. NOM :**

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Énoncer avec précision le théorème du rang.

2. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E. Donner la définition de l'expression « la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe » et donner une propriété équivalente à cette expression.

3. Soient A la matrice pleine de 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

4. Soit $n \geqslant 2$ entier. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \dots & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Soient $p \geqslant 2$ entier et f un endomorphisme de E qui vérifie $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que la famille $\beta = (a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ soit libre.