Le petit point de cours fictif (0), Révision sup, une correction

1. Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$. On suppose que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Démontrer que g est surjective et f injective.

   • Soit $x \in X$. On a alors $x = g \circ f(x) = g[f(x)] \in \mathrm{Im}\, g$. Ainsi $\mathrm{Im}\, g = X$ et g est surjective.

   • Soient x_1 et x_2 dans X tels que $f(x_1) = f(x_2)$. En appliquant g on obtient :

   $$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

   Comme $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, il vient $x_1 = x_2$. Ainsi f est injective.

2. Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré impair. Démontrer que P admet au moins une racine réelle.

   Comme P est de degré impair, en confondant P avec la fonction polynôme associée, quitte à changer P en $-P$, on a :

   $$\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} P = -\infty \\ \lim\limits_{+\infty} P = +\infty \end{cases}$$

   Ainsi la fonction P qui est continue sur $\mathbb{R}$ change de signe strict sur $\mathbb{R}$: le théorème des valeurs intermédiaire assure alors l'existence de $\alpha \in R$ tel que $P(\alpha) = 0$.

3. Énoncer avec précision le théorème fondamental.

   Le théorème fondamental. *Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, continue. Alors la fonction*

   $$F = \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

   est de classe C^1 sur I avec $F' = f$.

4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un fonction telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Énoncer un théorème permettant d'affirmer que $f = 0$ sur $[a, b]$.

   Théorème. *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **continue** et **positive**.*
   Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors f est nulle sur $[a, b]$.

5. Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Fixons $n \geqslant 1$ entier naturel. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t &= \left\{\frac{\sin nt}{n}f(t)\right\}_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin nt}{n}f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(1)\cos n - f(0)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire appliqué deux fois on obtient :

$$\left|\int_0^1 f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(1)|+|f(0)|}{n} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^1 \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t}_{\text{réel fixé}}.$$

Ceci étant valable pour tout $n \geqslant 1$, il vient par sandwich : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = 0}$.

6. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = h(t)$.

L'équation homogène associée est $y' - y = 0$ et sa solution générale est $t \mapsto C\mathrm{e}^t$ où C décrit $\mathbb{R}$.
On cherche alors une solution particulière de la forme $f : t \mapsto \lambda(t)\mathrm{e}^t$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout t réel on a $f'(t) = (\lambda'(t) + \lambda(t))\mathrm{e}^t$. On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}& y \text{ solution de } y' - y = h(t) \text{ sur } \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & (\lambda'(t) + \lambda(t))\mathrm{e}^t - \lambda(t)\mathrm{e}^t = h(t) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \lambda'(t) = h(t)\mathrm{e}^{-t} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

On prend $\lambda : x \mapsto \displaystyle\int_0^x h(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ de sorte que la solution générale de $y' - y = h(t)$ est :

$$x \mapsto \left(C + \int_0^x h(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^x.$$