Le petit point de cours fictif (0), Révision sup

1. Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$. On suppose que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Démontrer que g est surjective et f injective.

2. Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré impair. Démontrer que P admet au moins une racine réelle.

3. Énoncer avec précision le théorème fondamental.

4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un fonction telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Énoncer un théorème permettant d'affirmer que $f = 0$ sur $[a, b]$.

5. Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = h(t)$.