Le petit point de cours (4), une correction

Dans la suite E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f est un endomorphisme de E.

1. On suppose dans cette question que E est de dimension finie $n \geqslant 1$. Démontrer que f admet un polynôme annulateur non nul.

   Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ La famille $(f^k)_{0\leqslant k\leqslant n^2}$ est une famille de n^2+1 éléments de $\mathcal{L}(E)$. Mais $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 : cette famille est liée. Il existe ainsi $a_0, \dots, a_{n^2}$, **non tous nuls**, dans $\mathbb{K}$ tels que :
   $$a_{n^2} f^{n^2} + \cdots + a_0 f^0 = 0$$
   On pose alors $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ de sorte que P est non nul et $P(f) = 0$.

2. On suppose que f est un projecteur de E.
   a) Donner un polynôme annulateur de f

   On a $f^2 = f$ donc $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de f.

   b) 2 peut-il être une valeur propre de f ?

   Non : les valeurs propres de f sont des racines du polynôme annulateur $X^2 - X = X(X-1)$.

3. Soient $P = X^2 - 5X + 4 \in \mathbb{R}[X]$ et f dans $\mathcal{L}(E)$.
   a) Quel est l'endomorphisme $P(f)$?

   On a $P(f) = f^2 - 5f + 4\mathrm{Id}_E$.

   b) Démontrer que si λ est valeur propre de f alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$.

   On suppose que λ est valeur propre de f. Il existe alors x non nul dans E tel que : $f(x) = \lambda x$.
   Il vient alors :
   $$\begin{aligned} P(f)(x) &= f^2(x) - 5f(x) + 4x \\ &= \lambda^2 x - 5\lambda x + 4x = (\lambda^2 - 5\lambda + 4)x \\ &= P(\lambda)x \end{aligned}$$
   Ainsi $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$.

4. On reprend les notations de la question précédente et on suppose de plus que P est un polynôme annulateur de f.
   a) Démontrer que f est inversible et préciser f^{-1}.

   On a $P(f) = 0$ donc $\mathrm{Id}_E = \dfrac{-1}{4}(f^2 - 5f) = \dfrac{-1}{4}(f - 5\mathrm{Id}_E) \circ f$.

   De même $\mathrm{Id}_E = f \circ g$ où $g = \dfrac{-1}{4}(f - 5\mathrm{Id}_E)$ est un élément de $\mathcal{L}(E)$, ce qui permet d'affirmer que f est inversible d'inverse g.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste R_n dans la division euclidienne de X^n par P (on précisera ses coefficients).

La division euclidienne de X^n s'écrit $X^n = PQ_n + R_n$ avec $\deg R_n < \deg P = 2$.
Ainsi on peut écrire $R_n = a_n X + b_n$. Puis on a $P = (X-1)(X-4)$ ce qui amène le système, en évaluant l'égalité $X^n = PQ_n + R_n$ en 1 et 4 :

$$\begin{cases} 1 & = a_n + b_n \\ 4^n & = 4a_n + b_n \end{cases}.$$

Il vient donc $\begin{cases} a_n & = \frac{1}{3}(4^n - 1) \\ b_n & = \frac{1}{3}(4 - 4^n) \end{cases}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer f^n à l'aide de f.

On a $f^n = \underbrace{P(f)}_{=0} \circ Q_n(f) + R_n(f) = \frac{1}{3}(4^n - 1)\, f + \frac{1}{3}(4 - 4^n)\, \mathrm{Id}_E$.

d) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que les droites vectorielles de E stables par f sont exactement celles engendrées par des vecteurs propres de f.

• On suppose que d est une droite vectorielle de E stable par f. Soit $x_0 \in d$, non nul. On a alors $d = \mathrm{vect}(x_0)$. Mais $f(x_0) \in d$, par stabilité, donc il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = \lambda x_0$. Comme x_0 est **non nul**, c'est un vecteur propre de f.

• On suppose que x est un vecteur propre de f, associé à une valeur propre λ et on note $d = \mathrm{vect}(x)$ la droite vectorielle engendrée par x. Si $y \in d$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$. Il vient alors :

$$f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda x \in \mathrm{vect}(x).$$

Ainsi d est f-stable.