Le petit point de cours (3)

Le 15 octobre 2024. **15 minutes sans calculette. NOM :**

1. Y a-t-il équivalence entre convergence absolue et convergence pour les intégrales impropres ?

2. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Que signifie l'expression « f *est intégrable sur* $]0, +\infty[$ » ?

3. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On pose pour $x > 0$: $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   a. Étudier la limite de R en $+\infty$.

   b. Démontrer que R est une fonction de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner R'.

4. Démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. Soit α un réel. Quand l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est-elle convergente ? (on énoncera avec précision les résultats).

6. Quelle est la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$?

7. **Bonus.** La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?