Le petit point de cours (2), une correction

1. a) Énoncer avec précision l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky (on précisera le cas d'égalité).

 INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ-BOUNIAKOWSKY. *Soit* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace pré-hilbertien réel. Si* x *et* y *sont dans* E *alors :*

$$\boxed{|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \ \|y\|},$$

 avec égalité si et seulement si x *et* y *sont liés.*

 b) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky (sans le cas d'égalité).

 Prenons x et y dans E ainsi que λ réel. On a alors :

$$0 \leqslant \|x+\lambda y\|^2 = \underbrace{\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2}_{=T(\lambda)}$$

 Il en résulte que $\boxed{\text{si } \|y\| \neq 0}$ alors $T(\lambda)$ est un trinôme du second degré en λ à coefficient dominant strictement positif qui est toujours positif ce qui implique que

$$\Delta' \leqslant 0 \quad \text{i.e.} \quad \langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2 \leqslant 0.$$

 Si maintenant $\|y\| = 0$ alors il reste $\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle \geqslant 0$, pour tout λ réel. Si $\langle x, y\rangle \neq 0$, par exemple $\langle x, y\rangle > 0$, en faisant tendre λ vers $-\infty$ on obtient une contradiction. Ainsi $\langle x, y\rangle = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

 Bonus : démonstration du cas d'égalité. Sous l'hypothèse $\|y\| \neq 0$, le cas d'égalité a lieu exactement lorsque T admet une racine i.e. $\Delta' = 0$. Or :

$$\begin{aligned}
\Delta' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists\lambda_0 \in \mathbb{R})\,(T(\lambda_0) = 0)\\
&\Leftrightarrow \quad (\exists\lambda_0 \in \mathbb{R})\left(\|x+\lambda_0 y\|^2 = 0\right)\\
&\Leftrightarrow \quad (\exists\lambda_0 \in \mathbb{R})\,(x+\lambda_0 y = 0)\\
&\Leftrightarrow \quad (x, y) \text{ liée}
\end{aligned}$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Justifier que $f : x \mapsto \det(A - xJ)$ est une fonction polynomiale de degré 1.

 Soit $x \in \mathbb{K}$ et soit B la matrice obtenue à partir de $A - xJ$ en faisant les opérations suivantes sur les colonnes de $A - xJ$: $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$. La première colonne de B est celle de $A - xJ$ et les autres colonnes de B ne contiennent plus la variable x. Comme $\det(A - xJ) = \det B$, en développant ce dernier déterminant selon la première colonne, il ne reste plus qu'une somme de fonctions polynomiales de degré 1.

3. Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

 Pour $n \geqslant 1$ entier, on désigne par Δ_n le déterminant de A_n.

 a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.

Soit $n \geqslant 1$ entier. On développe Δ_{n+2} selon la première ligne pour obtenir :

$$\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n-1} - (-1)D$$

où D est un déterminant d'ordre $n+1$ que l'on développe selon la première colonne pour obtenir $D = (-1)\Delta_n$, d'où le résultat.

b) Déterminer Δ_n en fonction de n.

L'équation caractéristique de la suite récurrente linéaire obtenue est : $r^2 - 2r + 1 = 0$. Il y a une racine double $r = 1$ donc il existe α et β dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ait :

$$\Delta_n = (\alpha n + \beta)r^n = \alpha n + \beta.$$

Comme $\Delta_1 = 2$ et $\Delta_2 = 4 - 1 = 3$ il vient :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

ce qui donne de suite $\alpha = 1 = \beta$.

4. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ distincts dans $\mathbb{K}$ et $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^n & \lambda_1^n & \ldots & \lambda_n^n \end{vmatrix}$.

a) Quelle est la valeur de $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$?

On a $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \displaystyle\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$ (encore valable lorsque les λ_i ne sont pas distincts deux à deux !).

b) Démontrer le résultat ci-dessus.

On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante : « Dès que $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ sont distincts dans $\mathbb{K}$ on a $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \displaystyle\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$ ».

— La propriété $\mathcal{P}_1$ est clairement vraie.

— On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$.
Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$ distincts dans $\mathbb{K}$. En développant pour $x \in K$ le déterminant $V_{n+2}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, x)$ selon la dernière colonne, on voit que $x \mapsto V_{n+2}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, x)$ est une fonction polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$. Mais cette fonction polynôme admet $n+1$ racines distinctes qui sont $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ et ainsi :

$$V_{n+2}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, x) = V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \prod_{0 \leqslant i \leqslant n} (x - \lambda_i).$$

On évalue en λ_{n+1} pour avoir le résultat en utilisant le fait que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

5. Soient X un ensemble non vide et E l'espace vectoriel des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées. Pour $f \in E$ on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Démontrer que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur E.

- Tout d'abord pour tout $f \in E$, l'ensemble $\{|f(x)| \mid x \in X\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure : ainsi $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien une fonction de E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
- Il n'y a aucun problème pour monter la séparation et l'homogénéité.
- Soient f et g dans E. On a alors pour tout x dans X :

$$|(f+g)(x)| \leqslant \underbrace{|f(x)|}_{\leqslant \|f\|_\infty} + \underbrace{|g(x)|}_{\leqslant \|g\|_\infty} \leqslant \underbrace{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}_{\text{indépendant de } x}.$$

Ainsi $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.