Le petit point de cours (2)

Le 1 octobre 2024. **15 minutes sans calculette. NOM :**

1. a) Énoncer avec précision l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky (on précisera le cas d'égalité).

   b) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky (sans le cas d'égalité).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Justifier que $f : x \mapsto \det(A - xJ)$ est une fonction polynomiale de degré 1.

3. Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Pour $n \geqslant 1$ entier, on désigne par Δ_n le déterminant de A_n.

   a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.

b) Déterminer Δ_n en fonction de n.

4. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ distincts dans $\mathbb{K}$ et $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^n & \lambda_1^n & \ldots & \lambda_n^n \end{vmatrix}$.

   a) Quelle est la valeur de $V_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$?

   b) Démontrer le résultat ci-dessus.

5. Soient X un ensemble non vide et E l'espace vectoriel des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées. Pour $f \in E$ on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| .$$

   Démontrer que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur E.