Le petit point de cours (1), une correction

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. *Du cours...*

a. Énoncer avec précision le théorème du rang.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ avec E de dimension finie. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ on a :

$$\dim E = \mathrm{rg} f + \dim \ker f.$$

b. Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces de E. Donner la définition de l'expression « la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe » et donner une propriété équivalente à cette expression.

• La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe lorsque tout élément x de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ s'écrit de manière **unique** $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$ avec chaque $x_i \in F_i$.

• La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E$, on a : $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

c. Qu'est-ce qu'une forme linéaire sur E ?

Une forme linéaire sur E est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

d. Démontrer qu'une forme linéaire sur E est soit nulle soit surjective.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Alors $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ qui est de dimension 1.
Ainsi :
— ou bien $\dim \mathrm{Im}\, f = 0$ et alors $\mathrm{Im}\, f = \{0_{\mathbb{K}}\}$;
— ou bien $\dim \mathrm{Im}\, f = 1$ et alors $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{K}$, donc f est surjective.

2. Dans cette question E est de dimension finie $n \geqslant 1$.

a. Qu'est-ce qu'un hyperplan de E ?

Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

b. Démontrer que tout sous-espace vectoriel F de E vérifiant $\dim F \leqslant n$ est inclus dans un hyperplan de E.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $m \leqslant n-1$. Si $m = 0$, $F = \{0\}$ est inclus dans tout hyperplan de E.
Si$m \geqslant 1$, on considère une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ de F que l'on complète en une base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E.
On a alors $F = \mathrm{vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \subset \mathrm{vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ qui est un hyperplan de E.

3. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

   a. Soit F un sous-espace de E. Donner la signification de : F est g-stable.

   L'expression « F est g-stable » signifie que $g(F) \subset F$ i.e. $(\forall x \in F)(g(x) \in F)$.

   b. Soit λ un réel. On note $E_{f,\lambda} = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. On suppose que f et g commutent, c'est à dire vérifient : $f \circ g = g \circ f$. Démontrer que $E_{f,\lambda}$ est g-stable.

   Soit $x \in E_{f,\lambda}$. Montrons que $g(x) \in E_{f,\lambda}$. On a :

$$\begin{aligned}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)(g(x)) &= f \circ g(x) - \lambda g(x) \\ &= g \circ f(x) - \lambda g(x) \\ &= g(f(x) - \lambda x) \\ &= g(0_E) = 0_E\end{aligned}$$

   Ainsi $g(x) \in E_{f,\lambda}$. Ceci étant vrai pour tout x dans $E_{f,\lambda}$, le sous-espace $E_{f,\lambda}$ est g-stable.

4. Soient A la matrice pleine de 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$. On notera $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   La matrice A est de rang 1 donc (théorème du rang), $\ker f$ est de dimension $n-1$. En notant $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, comme $C_1 = C_2 = \cdots = C_n$, on a, pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, $f(e_1 - e_i) = 0$.
   Mais la famille $(e_1 - e_i)_{i \in \{2,\ldots,n\}}$ est libre, donc :

$$\ker f = \operatorname{vect}(e_1 - e_i)_{i \in \{2,\ldots,n\}}.$$

   Enfin $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \operatorname{vect}(f(e_1))$, où :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

5. Dans cette question E est de dimension finie $n \geqslant 1$ et p est un projecteur de E de rang $r \geqslant 1$. Justifier qu'il existe une base β de E telle que la matrice de f dans β est :

$$[p]_\beta = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{n-r,r} \\ \hline 0_{r,n-r} & 0_{n-r} \end{array}\right),$$

   où I_r est la matrice identité d'ordre r, et $0_{s,q}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,q}(\mathbb{K})$.

   Comme p est un projecteur de E, $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$. On prend alors une base β_1 de $\operatorname{Im} p$ et une base β_2 de $\ker p$ et on note $\beta = rec(\beta_1, \beta_2)$. La famille β est une base de E puisque $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ et la matrice $[p]_\beta$ est de la forme souhaitée car $\operatorname{Im} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p.