Le petit point de cours (1)

Le 18 septembre 2024. **20 minutes sans calculette. NOM :**

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. *Du cours...*
   a. Énoncer avec précision le théorème du rang.

   b. Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces de E. Donner la définition de l'expression « la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe » et donner une propriété équivalente à cette expression.

   c. Qu'est-ce qu'une forme linéaire sur E ?

   d. Démontrer qu'une forme linéaire sur E est soit nulle soit surjective.

2. Dans cette question E est de dimension finie $n \geqslant 1$.
   a. Qu'est-ce qu'un hyperplan de E ?

   b. Démontrer que tout sous-espace vectoriel F de E vérifiant $\dim F \leqslant n-1$ est inclus dans un hyperplan de E.

3. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

   a. Soit F un sous-espace de E. Donner la signification de : F est g-stable.

   b. Soit λ un réel. On note $E_{f,\lambda} = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. On suppose que f et g commutent, c'est à dire vérifient : $f \circ g = g \circ f$. Démontrer que $E_{f,\lambda}$ est g-stable.

4. Soient A la matrice pleine de 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$. On notera $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

5. Dans cette question E est de dimension finie $n \geqslant 1$ et p est un projecteur de E de rang $r \geqslant 1$. Justifier qu'il existe une base β de E telle que la matrice de f dans β est :

$$[p]_\beta = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{n-r,r} \\ \hline 0_{r,n-r} & 0_{n-r} \end{array} \right),$$

   où I_r est la matrice identité d'ordre r, et $0_{s,q}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,q}(\mathbb{K})$.