# Cours interactif de topologie métrique
Une correction

## Table des matières


**1 Distances et normes** **2**
- 1.1 Définitions . . . 2
- 1.2 Premiers exemples . . . 2
- 1.3 Comparaison des espaces métriques . . . 4
- 1.4 Boules et Sphères . . . 5
- 1.5 Parties convexes d'un espace vectoriel . . . 6
- 1.6 Parties bornées d'un espace métrique, applications bornées . . . 6
- 1.7 Suites dans les espaces métriques et extractions . . . 7
- 1.8 Normes et distances équivalentes . . . 8

**2 Topologie d'un espace métrique** **8**
- 2.1 Ouverts d'un espace métrique . . . 8
- 2.2 Fermés d'un espace métrique . . . 9
- 2.3 Point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle. . . . 10
- 2.4 Voisinages . . . 11
- 2.5 Points intérieurs, frontière . . . 11
- 2.6 Parties denses d'un espace espace métrique . . . 12
- 2.7 Invariance des notions topologiques pour des distances équivalentes. 12

**3 Complétude** **12**
- 3.1 Généralités . . . 12
- 3.2 Propriétés importantes des espaces complets . . . 14

**4 Limites et continuité des fonctions entre espaces métriques** **15**
- 4.1 Limites et continuité en un point . . . 15
- 4.2 Opérations classiques sur les fonctions continues. . . . 16
- 4.3 Caractérisation globale de la continuité . . . 16
- 4.4 Compléments . . . 17
- 4.5 Applications uniformément continues . . . 18
- 4.6 Le théorème du point fixe de Picard . . . 18

**5 Quelques notions importantes** **19**
- 5.1 Produit fini d'espaces métriques ou d'espaces vectoriels normés . 19
- 5.2 Fonctions composantes . . . 20
- 5.3 Topologie trace, points isolés . . . 20

**6 Applications linéaires continues** **21**
- 6.1 Le théorème fondamental . . . 21
- 6.2 Normes d'opérateurs . . . 22

**7 Compacité** **25**
- 7.1 Définition séquentielle . . . 25
- 7.2 Propriétés . . . 25
- 7.3 Compacité et continuité . . . 28

**8 Espaces vectoriels de dimension finie** **29**
- 8.1 L'équivalence des normes . . . 29
- 8.2 Conséquences . . . 30
- 8.3 Suites convergentes dans un espace vectoriel de dimension finie . 30
- 8.4 Limite et continuité en dimension finie . . . 31
- 8.5 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales 31

**9 Connexité** **32**
- 9.1 Généralités . . . 32
- 9.2 Propriétés des espaces connexes . . . 33
- 9.3 Composantes connexes . . . 34
- 9.4 Connexité et applications continues . . . 35
- 9.5 Produit fini de connexes . . . 36

**10 Connexité par arcs** **36**
- 10.1 Généralités . . . 36
- 10.2 Propriétés des espaces connexes par arcs . . . 36
- 10.3 Composantes connexes par arcs . . . 36
- 10.4 Connexité et applications continues . . . 37
- 10.5 Connexité par arcs versus connexité . . . 37

**11 Compléments** **37**
11.1 Produit dénombrables d'espaces métriques . . . . . 37
11.2 Produit dénombrable d'espaces métriques compacts . . . . . 39

# 1 Distances et normes

## 1.1 Définitions

**Définition 1** *Soit $E$ un ensemble. Une distance sur $E$ est une application* $\mathrm{dist} : E^2 \to \mathbb{R}^+$ *telle que pour tout $(x, y, z) \in E^3$ on ait :*

1. $\mathrm{dist}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
2. $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(y, x)$ ;
3. $\mathrm{dist}(x, z) \leqslant \mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z)$.

**Remarque 1.1**

1. Lorsque $(E, d)$ est un espace métrique, pour tout $(x, y, z) \in E^3$ on a :
$$|d(x, z) - d(z, y)| \leqslant d(x, y).$$
2. Lorsque $(E, d)$ est un espace métrique et $A \subset E$, on notera $d_A$ la restriction de $d$ à $A^2$, et alors $(A, d_A)$ est un espace métrique.

**Définition 2** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur $E$ est une application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie pour tout $x$, $y$ dans $E$ et $\lambda$ scalaire :*

1. $\|x\| \geqslant 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\|$
4. ***Inégalité triangulaire*** *:* $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

**Remarque 1.2**

1. Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \| \ \|)$ où $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\| \ \|$ est une norme sur $E$.
2. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. On définit une distance sur $E$ en posant pour tout $(x, y) \in E$ :
$$\mathrm{dist}(x, y) = \|y - x\|.$$
Cette distance est « invariante par translation » : pour tout $(x, y) \in E^2$ et $v \in E$ on a :
$$\mathrm{dist}(x + v, y + v) = \mathrm{dist}(x, y).$$
3. Pour les normes provenant d'un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ euclidien ou hermitien sur $E$, définies par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, l'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$
En effet, pour $x$ et $y$ dans $E$ on a :
$$\begin{aligned} \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| \\ &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \leqslant \|x\| \, \|y\| \end{aligned}$$

## 1.2 Premiers exemples

• La distance discrète sur un ensemble non vide $E$. Pour $(x, y) \in E$ on pose :
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Sur $\mathbb{K}^n$ on a les normes usuelles suivantes ($v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$) :
$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \|v\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\| \ \|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ (dans le cas de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle provient du produit scalaire hermitien canonique).

**Exercice 1**
Démontrer que : $\| \ \|_2 \leqslant \sqrt{n} \, \| \ \|_\infty \leqslant \sqrt{n} \, \| \ \|_1 \leqslant n \, \| \ \|_2$.

Soit $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

• On a $\|v\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} |x_k|^2 \leqslant n \|v\|_\infty^2$.

• $\|v\|_\infty \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_i| = \|v\|_1$.

• $\|v\|_\infty \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_i| = \|v\|_1$.

• $\|v\|_1 = \langle u, w \rangle \leqslant \|u\|_2 \|w\|_2$ où $w = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $u = (1, \dots, 1)$, donc :

$$\|v\|_1 \leqslant \sqrt{n} \|v\|_2 .$$

**Exercice 2 (Inégalités de Hölder et Minkowsky)**
Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels positifs, $p$ et $q$ des réels $> 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient $x$ et $y$ réels positifs. Démontrer que $xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.

2. On pose $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^p$ et $B = \sum_{i=1}^{n} b_i^q$, sommes que l'on suppose non nulles. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on pose encore :

$$x_i = \frac{a_i}{A^{\frac{1}{p}}} \quad \text{et} \quad y_i = \frac{b_i}{B^{\frac{1}{q}}}$$

Utiliser la première question pour en déduire l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

3. Pour $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose : $\|v\|_p = \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$. Démontrer que $\| \ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ (l'inégalité triangulaire s'appelle l'inégalité de Minkowsky).

   1. Si $x$ ou $y$ est nul c'est évident. Sinon on pose $u = \ln x$ et $v = \ln y$. Par convexité de exp il vient :

$$\exp(u+v) = \exp\left( \frac{1}{p}pu + \frac{1}{q}qv \right) \leqslant \frac{1}{p}e^{pu} + \frac{1}{q}e^{qv}$$

et ainsi $xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}x^q$.

   2. La première question affirme que : $x_i y_i \leqslant \frac{1}{p}x_i^p + \frac{1}{q}y_i^q$.
   Par somme on a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{1}{p}x_i^p + \frac{1}{q}y_i^q \right) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} y_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

   d'où le résultat.

   3. Il n'y a pas de problème pour montrer la séparation et l'homogénéité. Pour l'inégalité triangulaire, on prend $v = (x_1, \dots, x_n)$ et $w = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|x_k + y_k|}_{\leqslant |x_k| + |y_k|} |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \, |x_k + y_k|^{p-1} \end{aligned}$$

   On a applique alors l'inégalité de Hölder avec $p$ et $q = \frac{p}{p-1}$ (qui vérifient bien $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) aux deux termes du second membre pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leqslant \left( \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} \right) \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/q},$$

   ce qui donne le résultat, en séparant les cas $\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = 0$ ou non.

• Sur l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a les exemples de normes ($A \in E$) :

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |(A)_{i,j}| , \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |(A)_{i,j}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} |(A)_{i,j}| .$$

Il est important de noter que la $\| \ \|_2$ provient du produit scalaire : $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$.
Noter aussi que les normes utiles sur $E$ sont celles pour lesquelles on a $\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$ pour tout $(A, B) \in E^2$ (on parle de norme d'algèbre).

**Exercice 3**
Démontrer que $n\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$ sont des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$ on a :

$$|(AB)_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^n (A)_{i,k}(B)_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \underbrace{|(A)_{i,k}|}_{\leqslant \|A\|_\infty}\underbrace{|(B)_{k,j}|}_{\leqslant \|B\|_\infty}$$

Ainsi $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$, d'où $n\|\ \|_\infty$ est une norme d'algèbre.

• Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$ on a :

$$\begin{aligned}
\|AB\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |(AB)_{i,j}|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n |(A)_{i,k}|\,|(B)_{k,j}|\right)^2}_{\underset{CSB}{\leqslant}\left(\sum_{k=1}^n |(A)_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{\ell=1}^n |(B)_{\ell,j}|^2\right)} \\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n |(A)_{i,k}|^2\right)}_{=\|A\|_2^2}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^n\sum_{\ell=1}^n |(B)_{\ell,j}|^2\right)}_{=\|B\|_2^2}
\end{aligned}$$

• Sur l'espace $E$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ on a les exemples de normes ($f\in E$) :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|\,,\quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2},\quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,.$$

La norme $\|\ \|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire

$$(f,g)\mapsto \int_0^1 fg.$$

• Lorsque $X$ est un ensemble non vide et $E=\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications bornées de $X$ dans $\mathbb{R}$, l'application :

$$\|\ \|_\infty : f\mapsto \sup_{x\in X}|f(x)|$$

est une norme sur $E$.

## 1.3 Comparaison des espaces métriques

**Définition 3** *Soient $(E,d)$ et $(F,\delta)$ des espaces métriques, $k\in\mathbb{R}^+$ et $f:E\to F$. On dit que $f$ est $k$-lipschitzienne lorsque pour tout $(x,y)\in E^2$ on a :*

$$\delta(f(x),f(y))\leqslant kd(x,y).$$

**Exercice 4**
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $C^1$. Montrer que $f$ est lipschitzienne.

La fonction $f$ est de classe $C^1$ sur le segment $[a,b]$ donc à dérivée bornée. On écrit les accroissements finis...

**Remarque 1.3**
La composée de deux applications lipschitziennes est encore lipschitzienne.

**Exercice 5**
Soient $(E,d)$ un espace métrique non vide, $a_0\in E$ et $A$ une partie non vide de $E$. On pose, pour tout $x$ dans $E$ :

$$\begin{cases} d_{a_0}(x) & = d(a_0,x) \\ \operatorname{dist}(x,A) & = \inf\limits_{a\in A} d(a,x)\end{cases}$$

1. Montrer que $d_{a_0}$ est lipschitzienne.
2. Montrer que la fonction $d_A : x\mapsto \operatorname{dist}(x,A)$ est correctement définie et lipschitzienne.

1. Soient $x$ et $y$ dans $E$. On a : $|d(x,a)-d(a,y)|\leqslant d(x,y)$, donc :
$$|d_a(x)-d_a(y)|\leqslant d(x,y).$$

2. • Soit $x\in E$. L'ensemble $\{d(x,a)\mid a\in A\}$ est une partie non vide est minorée (par 0) de $\mathbb{R}$ : ainsi $\operatorname{dist}(x,A)$ est bien défini.
• Soient $x$ et $y$ dans $E$. Pour tout $a\in A$ on a :
$$\operatorname{dist}(x,A)\leqslant d(x,a)\leqslant d(x,y)+d(y,a),$$
donc $\operatorname{dist}(x,A)-d(x,y)\leqslant d(y,a)$ et il vient ainsi
$$\operatorname{dist}(x,A)-d(x,y)\leqslant \operatorname{dist}(y,A).$$
De la même manière (permuter les rôles de $x$ et $y$) :
$$\operatorname{dist}(y,A)-\operatorname{dist}(x,A)\leqslant d(x,y).$$
Ainsi : $|\operatorname{dist}(x,A)-\operatorname{dist}(y,A)|\leqslant d(x,y)$.

**Définition 4** *Soient $(E,d)$ et $(F,\delta)$ des espaces métriques. Une isométrie de $(E,d)$ sur $(F,\delta)$ est une application $f : E \to F$ telle que pour tout $(x,y) \in E$ on ait :*

$$\delta(f(x),f(y)) = d(x,y).$$

**Exercice 6 (Le plongement de Kuratowsky)**
Soit $(X,\text{dist})$ un espace métrique non vide et $a_0 \in E$. Pour $a \in E$ on pose : $f_a : x \mapsto \text{dist}(a,x) - \text{dist}(a_0,x)$.
Démontrer que $\varphi = \begin{pmatrix} (X,d) & \longrightarrow & (\mathcal{B}(X,\mathbb{R}),\|\ \|_\infty) \\ a & \longmapsto & f_a \end{pmatrix}$ est un plongement isométrique.

- Soit $a \in A$. Pour tout $x$ dans $E$ on a :

$$|f_a(x)| = |\text{dist}(a,x) - \text{dist}(x,a_0)| \leqslant \text{dist}(a,a_0).$$

Ainsi la fonction $f_a$ est bien bornée.

- Soient $a$ et $b$ dans $E$. Pour tout $x$ dans $E$, on a :

$$|f_a(x) - f_b(x)| = |\text{dist}(a,x) - \text{dist}(x,b)| \leqslant \text{dist}(a,b).$$

Ainsi $\|f_a - f_b\|_\infty \leqslant \text{dist}(a,b)$.
De plus, $|f_a(a) - f_b(a)| = \text{dist}(a,b)$ donc $\|f_a - f_b\|_\infty = \text{dist}(a,b)$.

## 1.4 Boules et Sphères

**Définition 5** *Soient $(E,\text{dist})$ un espace métrique, $a \in E$ et $r > 0$.*

1. *La boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ est :*

$$B_o(a,r) = \{x \in E \mid \text{dist}(a,x) < r\}.$$

2. *La boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$ est :*

$$B_f(a,r) = \{x \in E \mid \text{dist}(a,x) \leqslant r\}.$$

3. *La sphère de centre $a$ et de rayon $r$ est :*

$$S(a,r) = \{x \in E \mid \text{dist}(a,x) = r\}.$$

**Remarque 1.4**
Les boules d'un espace vectoriel normé « se ressemblent toutes » :

$$B_f(a,r) = a + rB_f(0,1).$$

**Exercice 7**

1. Dessiner la boules unité fermée sur $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles.
2. Tracer l'allure de la « médiatrice » du segment $[AB]$ où $A = (-1,0)$ et $B = (1,0)$ dans $(\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty)$.
3. Trouver un espace métrique $(E,d)$ et deux boules $B$ et $B'$ de rayons respectifs $r < r'$ telles que $B' \subset B$ et $B' \neq B$.

1. Pour $v = (x,y)$ dans $\mathbb{R}^2$ on a $\|v\|_1 \leqslant 1 \Leftrightarrow |x| + |y| \leqslant 1$. Ainsi $B_1 = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|_1 \leqslant 1\right\}$ est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$ et l'axe $y = 0$. On se contente de regarder $B_1 \cap (\mathbb{R}^+)^2$. On a alors pour $v = (x,y)$ dans $\mathbb{R}^2$ :

$$v \in B_1 \cap (\mathbb{R}^+)^2 \Leftrightarrow x + y \leqslant 1$$

ce qui permet de dessiner $B_1$ (voir figure 1)

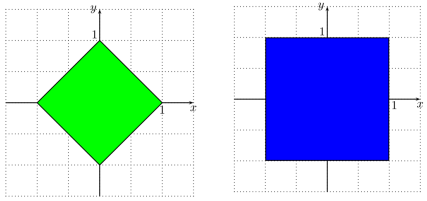



FIGURE 1 – Boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$

2. La « médiatrice » demandée est en rouge sur la figure 2.

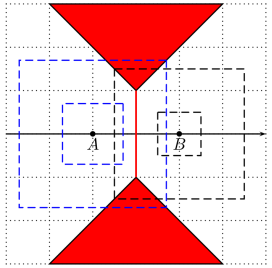



FIGURE 2 – « médiatrice » dans $(\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty)$

3. On se place dans $(E,d) = ]0,2[$ muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$. On prend $B = B(1,1) = E$ et $B' = B(3/2,5/4)$

## 1.5 Parties convexes d'un espace vectoriel

**Définition 6** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une partie $A$ de $E$ est convexe lorsque pour tout $(m,p) \in A^2$ le segment d'extrémité $m$ et $p$ est encore dans $A$, ce qui se traduit par :*

$$(\forall \lambda \in [0,1])\,((1-\lambda)m + \lambda p) \in A.$$

**Remarque 1.5**

1. Cette notion ne dépend pas de la norme mais de la structure vectorielle (pas de sens a priori sur les espaces métriques).
2. Pour tout $a \in E$ et $\lambda$ réel on a : $(1-\lambda)a + \lambda a = a$.

**Théorème 1**
*Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.*

1. *Les boules de $E$ sont convexes.*
2. *Une intersection de parties convexes de $E$ est encore convexe.*

**Exercice 8**
Démontrer le théorème 1.

1. Soient $a \in E$ et $r > 0$. Soient $x$ et $y$ dans $B(a,r)$ ainsi que $\lambda \in [0,1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|(1-\lambda)x + \lambda y - a\| &= \|(1-\lambda)(x-a) + \lambda(y-a)\| \\ &\leqslant (1-\lambda)\|x-a\| + \lambda\|y-a\| \\ &< (1-\lambda)r + \lambda r = r \end{aligned}$$

2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de convexes de $E$.
Soient $x$ et $y$ dans $\bigcap_{i\in I} A_i$ ainsi que $\lambda \in [0,1]$.
Pour tout $i \in I$ on a $x \in A_i$ et $y \in A_i$, donc $(1-\lambda)x + \lambda y \in A_i$, puisque $A_i$ est convexe. Ainsi :

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in \bigcap_{i\in I} A_i.$$

## 1.6 Parties bornées d'un espace métrique, applications bornées

**Définition 7** *Soit $A \subset E$ où $(E,d)$ est un espace métrique. On dit que $A$ est bornée dans $(E,d)$ lorsque $A$ est inclus dans une boule de $(E,d)$.*

**Remarque 1.6**

1. Noter que la notion de partie bornée dépend du choix de la distance.
2. Lorsque $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé, $A \subset E$ est borné dans $(E, \| \ \|)$ lorsqu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $v \in A$ on ait : $\|v\| \leqslant R$.

**Exercice 9**
Soient $(E,d)$ un espace métrique et $A$ une partie non vide de $E$. Le diamètre de $A$ est :

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y).$$

Démontrer que $A$ est borné si et seulement si son diamètre est fini.

• Notons que $\operatorname{diam}(A)$ est bien défini puisque l'ensemble $\{d(a,b) \mid (a,b) \in A^2\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ donc $\sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.

• Si $A$ est une partie bornée de $E$, il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $A \subset B(x_0, r)$. Ainsi, pour tout $a$ et $b$ dans $A$ il vient

$$d(a,b) \leqslant d(a,x_0) + d(x_0,b) \leqslant 2r,$$

et ainsi $\operatorname{diam}(A) \leqslant 2r$.

• Supposons que $\operatorname{diam}(A)$ soit fini. Fixons $a_0 \in A$. Pour tout $a \in A$ on a :

$$d(a,a_0) \leqslant \operatorname{diam}(A),$$

donc $A$ est borné dans $E$.

**Définition 8** *Soient $X$ un ensemble quelconque, $(E,d)$ un espace métrique et $f : X \to E$. On dit que $f$ est bornée lorsque $\operatorname{Im} f$ est bornée dans $(E,d)$.*

## 1.7 Suites dans les espaces métriques et extractions

**Définition 9** *Soient $(E,d)$ un espace métrique, $(u_n)$ une suite dans $E$ et $\ell \in E$. On dit que la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$ lorsque $d(u_n,\ell) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(d(u_n,\ell) \leqslant \varepsilon)$$

**Remarque 1.7**
La notion de convergence de suites dépend de la distance (ce ne sera pas le cas pour les espace vectoriels normés de dimension finie).

**Exercice 10**
Soit $(E,d)$ un espace métrique.

1. Démontrer qu'il y a unicité de la limite pour une suite convergente.
2. Démontrer qu'une suite convergente dans $(E,d)$ est bornée.

   1. Supposons qu'une $(u_n)$ dans $(E,d)$ converge vers $\ell$ et $\lambda$ dans $E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc :

      $$d(\ell,\lambda) \leqslant d(\ell,u_n) + d(u_n,\lambda) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

      Par sandwich, on obtient : $d(\ell,\lambda) = 0$.

   2. Supposons qu'une $(u_n)$ dans $(E,d)$ converge vers $\ell$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $d(u_n,\ell) \leqslant 1$.
      Puis posons $R = \max\{d(u_0,\ell),\dots,d(u_{N-1},\ell),1\}$. On a alors $u_n \in B_f(\ell,R)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ : la suite $(u_n)$ est bornée.

**Définition 10** *Soient $(E,d)$ un espace métrique, $(u_n)$ une suite dans $E$ et $\lambda \in E$. On dit que $\lambda$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)$ lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant N)(d(u_n,\lambda) \leqslant \varepsilon)$$

**Remarque 1.8**
Avec les notations de la définition 10, dire que $\lambda$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)$ signifie exactement que pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ l'ensemble $A_{N,\varepsilon} = \{n \geqslant N \mid d(u_n,\lambda) \leqslant \varepsilon\}$ est non vide.

**Définition 11** *Une extraction est une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

**Remarque 1.9**

1. Soit $\varphi$ est une extraction. On a alors : $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En effet, si $\varphi(n) \geqslant n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors :

   $$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$$

   donc (comme $n \in \mathbb{N}$) il vient $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. Comme $\varphi(0) \geqslant 0$, on peut conclure par récurrence.

2. Soient $(E,d)$ un espace métrique, $(u_n)$ une suite dans $E$ et $\lambda \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
   $(i)$ $\lambda$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)$.
   $(ii)$ Il existe $\varphi$ extraction telle que $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

   • Supposons $(i)$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Avec $\varepsilon = 2^p$ pour $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_{N,p} = \{n \geqslant N \mid d(u_n,\lambda) \leqslant 2^{-p}\}$ est non vide.
   On définit alors correctement par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant :

   $$\begin{cases} \varphi(0) & = \min A_{0,p} \\ \varphi(p+1) & = \min A_{\varphi(p),p+1} = \min\left\{k \geqslant \varphi(p)+1 \mid d(u_k,\lambda) \leqslant 2^{-p+1}\right\} \end{cases}$$

   Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a alors : $d(u_{\varphi(p)},\lambda) \leqslant 2^{-p}$. Par sandwich : $d(u_{\varphi(p)},\lambda) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   • Supposons $(ii)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $d(u_{\varphi(n)},\lambda) \leqslant \varepsilon$.
   Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $n = \max(\varphi(N),\varphi(n_0)) \geqslant \varphi(N) \geqslant N$ et on a $d(u_n,\lambda) \leqslant \varepsilon$.

**Théorème 2**
*Soit une suite $(u_n)$ convergente vers $\ell$ dans un espace métrique $(E,d)$. Alors toute suite extraite de $(u_n)$ converge aussi vers $\ell$.*

**Exercice 11**
Démontrer le théorème 2.

Soit $\varphi$ un e extraction.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait : $d(u_n,\ell) \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, comme $\varphi(n) \geqslant n$, il vient : $d(u_{\varphi(n)},\ell) \leqslant \varepsilon$.

**Remarque 1.10**
*Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites dans un espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ qui convergent respectivement vers $u \in E$ et $v \in E$. Alors, pour tout $\alpha$ et $\beta$ dans $\mathbb{K}$, la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge vers $\alpha u + \beta v$.*

**Exercice 12**
On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $P \in E$. Trouver une norme sur $E$ telle que ;

$$X^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $Q_n = \begin{cases} X^n & \text{si } n \leqslant \deg P \\ X^n - P & \text{sinon} \end{cases}$.

La famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
Ainsi, pour tout $R \in \mathbb{R}[X]$ il existe une suite presque nulle $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $R = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n Q_n$ et on pose : $\|R\| = \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{|r_n|}{2^n}$.
On a alors une norme sur $\mathbb{R}[X]$ et il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|X^n - P\| = \|Q_n\| = \frac{1}{2^n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

## 1.8 Normes et distances équivalentes

**Définition 12** *Soient $\| \|$ et $N$ des normes sur un espace vectoriel $E$. On dit que la norme $\| \|$ est équivalente à la norme $N$ lorsqu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :*

$$\alpha N \leqslant \| \| \leqslant \beta N,$$

*i.e. pour tout $v$ dans $E$ : $\alpha N(v) \leqslant \|v\| \leqslant \beta N(v)$.*

**Remarque 1.11**

1. Lorsque $\| \|$ et $N$ sont deux normes équivalentes sur $E$ alors elles ont les même bornés et les même suites convergentes.
2. Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on peut penser à chercher une suite dans $E$ qui converge pour une des normes et qui ne converge pas pour l'autre norme.
3. On dit aussi que deux distances $d_1$ et $d_2$ sur un ensemble $E$ sont équivalentes lorsqu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\alpha d_1 \leqslant d_2 \leqslant \beta d_1.$$

**Exercice 13**
Sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ montrer que les normes $\| \|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f|$ et $\| \|_\infty : f \mapsto \max_{x\in[0,1]} |f(t)|$ ne sont pas équivalentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère $f_n : x \mapsto x^n$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ :$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$.
Cela interdit l'existence d'une constante $\beta > 0$ telle que $\| \|_\infty \leqslant \beta \| \|_1$.

# 2 Topologie d'un espace métrique

## 2.1 Ouverts d'un espace métrique

**Définition 13** *Soit $(E, d)$ un espace métrique. On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de $E$ est un ouvert de $(E, d)$ lorsque pour tout $a \in \mathcal{O}$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(a, \varepsilon)$ soit incluse dans $\mathcal{O}$.*
*On notera $\mathcal{T}_E$ ou $\mathcal{T}_d$ l'ensemble des ouverts de $(E, d)$ : c'est la topologie de $(E, d)$.*

**Remarque 2.1**

1. **Une mention spéciale sur le vocabulaire** : la notion d'ouvert est relative à l'espace métrique $(E, d)$ ; on parle d'ouvert de $(E, d)$ (ou de $E$) (et non d'ouvert tout court).
2. Il s'agit d'une notion permettant de traduire les propriétés « stables par petite perturbation ».
3. $E$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $E$.
4. Les intervalles ouverts de $(\mathbb{R}, | |)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

**Théorème 3**
*Soit $(E, d)$ un espace métrique.*

1. *Les boules ouvertes de $E$ sont des ouverts de $E$.*
2. *Une intersection **finie** d'ouverts de $E$ est un ouvert de $E$.*
3. *Une union quelconque d'ouverts de $E$ est encore un ouvert de $E$.*

**Exercice 14**
Démontrer le théorème 3

1. Soit $r > 0$ et $a \in E$. Soit $x \in B(a,r)$. Posons $\rho = r - d(a,x)$. Si $y \in B(x,\rho)$ alors :

   $d(a,y) \leqslant d(a,x)+d(x,y) < d(a,x)+\rho = d(a,x)+r-d(a,x) = r.$

   Ainsi $B(x,\rho) \subset B(a,r)$ : la boule $B(a,r)$ est un ouvert de $E$.
2. Soit $(O_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille finie d'ouverts de $E$.

   Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$. Ainsi, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ on a $x \in \mathcal{O}_i$, donc il existe $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset \mathcal{O}_i$. On pose :

   $$r = \min(r_1,\dots,r_n).$$

   On a alors, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset \mathcal{O}_i$, donc $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$.
3. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $E$. Si $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$, il existe $j \in I$ tel que $x \in \mathcal{O}_j$ et ainsi on dispose de $r_x > 0$ tel que :

   $$B(x,r_x) \subset \mathcal{O}_j \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i.$$

**Remarque 2.2**
Le point 2 du théorème 3 n'est pas vrai en général pour une intersection dénombrable : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ]-2^{-n}, 2^{-n}[ = \{0\}$.

**Exercice 15**
Soit $(E,d)$ un espace métrique.

1. Si $d$ est la distance discrète sur $E$, démontrer que $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(E)$.
2. Démontrer que tout ouvert non vide de $E$ est réunion de boules ouvertes de $E$ : on dit que l'ensemble des boules ouvertes de $(E,d)$ est une base de la topologie $\mathcal{T}_d$.

   1. On suppose que $d$ est la distance discrète sur $E$. On a alors, pour tout $x \in E$, $B(x,1) = \{x\}$ donc tout singleton est un ouvert de $E$ et si $A \in \mathcal{P}(E)$, $A = \bigsqcup_{x\in A} \{x\}$ est un eréunion d'ouverts de $E$ donc u ouvert de $E$.
   2. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $E$. Pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x,r_x) \subset \mathcal{O}$. On a alors :

      $$\mathcal{O} = \bigcup_{x\in\mathcal{O}} B(x,r_x).$$

## 2.2 Fermés d'un espace métrique

**Définition 14** *Soit $(E,d)$ un espace métrique. On dit que $F \subset E$ est fermé dans $E$ lorsque son complémentaire $F^c$ est un ouvert de $E$.*

**Théorème 4**
*Soit $(E,d)$ un espace métrique.*

1. *Les boules fermées, les sphères de $E$ sont des fermés de $E$.*
2. *Une union **finie** de fermés de $E$ est un fermé de $E$.*
3. *Une intersection quelconque de fermés de $E$ est un fermé de $E$.*

**Exercice 16**
Démontrer le théorème 4.

Les deux derniers points peuvent se faire avec le théorème 3 et les formules de Morgan : *lorsque $X$ est en semble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de $X$ on a*

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

**Remarque 2.3**
$E$ et $\emptyset$ sont des fermés (et des ouverts) de $E$. Les singletons sont des fermés de $E$. Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$, i.e. les intervalles de la forme $[a,b]$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

**Théorème 5 (Caractérisation séquentielle des fermés)**
*Soit $(E,d)$ un espace métrique. Soit $F \subset E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *$F$ est fermé dans $E$.*
(2) *Pour tout suite $(x_n)$ dans $F$ qui converge vers $\ell \in E$, on a $\ell \in F$.*

**Exercice 17**
Démontrer le théorème 5.

• On suppose que $F$ est un fermé de $E$. Soit $(x_n)$ une suite dans $F$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \notin F$. Ainsi $\ell \in F^c = \mathcal{O}$, qui est un ouvert de $F$ : il existe alors $r > 0$ tel que :

$$B(\ell, r) \subset \mathcal{O}.$$

Or $d(x_n, \ell) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait :

$$d(x_n, \ell) \leqslant r/2.$$

De là $x_N \in B(\ell, r) \subset \mathcal{O}$, ce qui est stupide puisque $x_N \in F = \mathcal{O}^c$.

• On suppose que pour tout suite $(x_n)$ dans $F$ qui converge vers $\ell \in E$, on a $\ell \in F$. Montrons que $F$ est fermé. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{O} = F^c$ n'est pas un ouvert de $E$.
Ainsi il existe $a \in \mathcal{O}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte $B(x_0, \varepsilon)$ rencontre $F$.
Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, il existe donc $x_n$ dans $F$ tel que $d(x_n, a) \leqslant 2^{-n}$.
De là on a construit une suite ${}^{(}x_n)$ dans $F$ telle $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$, donc $a \in F$, ce qui est absurde.

## 2.3 Point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle.

**Définition 15** *Soit $(E, d)$ un espace métrique. Soit $A \subset E$, non vide. On dit que $x \in E$ est adhérent à $A$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*
*Autrement dit, $x$ est adhérent à $A$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ (qui dépend de $\varepsilon$) tel que $d(x, a) \leqslant \varepsilon$.*
*On note $\overline{A}$ l'ensemble des points de $E$ adhérents à $A$ : c'est l'adhérence de $A$ dans $E$.*

**Exercice 18**
Soient $(E, d)$ un espace métrique et $A$ une partie non vide de $E$. Démontrer que pour tout $x$ dans $E$, $x \in \overline{A}$ si et seulement si $\operatorname{dist}(x, A) = 0$.

Soit $x \in E$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists a_\varepsilon \in A)(d(a_\varepsilon, x) \leqslant \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{dist}(x, A) = 0 \end{aligned}$$

**Théorème 6 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)**
*Soit $(E, d)$ un espace métrique. un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$, non vide. Pour $x \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $x \in \overline{A}$
(2) *Il existe une suite $(a_n)$ dans $A$ telle que $a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$.*

**Exercice 19**
Démontrer le théorème 6

**Corollaire 6.1**
*Soit $A$ une partie d'un espace métrique $(E, d)$. Alors $A$ est fermé dans $E$ si et seulement si $\overline{A} = A$.*

**Exercice 20**
Démontrer le corollaire 6.1.

• Supposons que $\overline{A} = A$. Soit $(x_n)$ une suite dans $A$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on a $\ell \in \overline{A}$ donc $\ell \in A$ et par caractérisation séquentielle des fermés, $A$ est fermé dans $E$.

• Supposons que $A$ est fermé dans $E$. On a toujours $A \subset \overline{A}$. Soit $x \in \overline{A}$. Il existe donc, par caractérisation séquentielle de l'adhérence, une suite $(a_n)$ dans $A$ telle que $a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$. Par caractérisation séquentielle des fermés, on a $x \in A$. Ainsi $\overline{A} \subset A$.

**Théorème 7**
*Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$. Alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $E$ qui contient $A$.*

**Exercice 21**
Démontrer le théorème 7.

• Montrons tout d'abord que $\overline{A}$ est un fermé de $E$ i.e. que $\mathcal{O} = \left(\overline{A}\right)^c$ est un ouvert de $E$. Soit $x \in \mathcal{O}$. Comme $x \notin \overline{A}$, il existe $r_x > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r_x)$ ne rencontre pas $A$.
Si maintenant $B(x, r_x) \cap \overline{A} \neq \emptyset$, il existe $y$ dans $\overline{A}$ tel que $d(x, y) < r_x$.
Posons $\varepsilon = r_x - d(x, y)$. Il existe alors $z \in A$ tel que $d(y, z) < \varepsilon$ et il vient alors :

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < r_x,$$

donc $B(x, r_x)$ rencontre $A$, ce qui est absurde.
Ainsi $B(x, r_x)$ ne rencontre pas $\overline{A}$, ce qui démontrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de $E$.

• Soit maintenant $F$ un fermé de $E$ qui contient $A$. Démontrons que $F$ contient aussi $\overline{A}$ i.e. que $F^c \subset \left(\overline{A}\right)^c$. Soit $x \in F^c$. Il existe donc $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset F^c$ donc $x \notin \overline{F} = F$ donc $x \notin \overline{A}$, puisque $\overline{A} \subset F$. Ainsi $x \in \left(\overline{A}\right)^c$.

**Exercice 22**
Soient $(E, d)$ un espace métrique et $(u_n)$ une suite dans $E$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)$ est un fermé de $E$.

Appelons $\Lambda$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(u_n)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\Omega_n = \{u_k \mid k \geqslant n\}$.
On a alors $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\Omega_n}$.

En effet si $\lambda \in \Lambda$, alors :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant N)(d(\lambda, u_n) \leqslant \varepsilon/2).$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $\varepsilon > 0$, $X_N \cap B(\lambda, \varepsilon) \neq \emptyset$
donc $\lambda \in \overline{\Omega_N}$.

Ainsi $\Lambda$ est fermé dans $E$ comme intersection de fermés de $E$.

## 2.4 Voisinages

**Définition 16** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $a \in E$. Une partie $V$ est appelée voisinage de $a$ dans $E$ lorsqu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $E$ tel que : $a \in \mathcal{O} \subset V$.*
*On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de $a$ dans $E$*

**Théorème 8**
*Soit $a \in E$ où $(E, d)$ est un espace métrique.*

1. *$E \in \mathcal{V}(a)$.*
2. *Soit $V \in \mathcal{V}(a)$. Si $W$ est une partie de $E$ qui contient $V$ alors $W \in \mathcal{V}(a)$.*
3. *$\mathcal{V}(a)$ est stable par intersection finie.*

## 2.5 Points intérieurs, frontière

**Définition 17** *Soient $(E, d)$ un espace métrique et $a \in A \subset E$. On dit que $a$ est intérieur à $A$ lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.*
*On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à $A$ : c'est l'intérieur de $A$*

**Théorème 9**
*Soient $A$ et $B$ deux parties d'un espace métrique $(E, d)$ on a :*

1. *$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
2. *$\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$ et $\overset{\circ}{\overline{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}$.*

**Théorème 10**
*Avec les notations de la définition 17 :*

1. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A$ ;*
2. *$A$ est un ouvert de $(E, d)$ si et seulement si $A = \mathring{A}$.*

**Exercice 23**
Démontrer le théorème 10.

**Définition 18** *Soient $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$. La frontière de $A$ est $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

**Théorème 11**
*Soient $(E, \| \ \|$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. Alors :*

$$\overline{B_o(a, r)} = B_f(a, r),\ \overset{\circ}{\overline{B_f(a, r)}} = B_o(a, r),\ \partial B_o(a, r) = \partial B_f(a, r) = S(a, r).$$

**Exercice 24**
Trouver un espace métrique mettant en défaut les égalités du théorème 11

**Exercice 25**
Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ d'intérieur non vide. Que dire ?

Comme $F$ est d'intérieur non vide, il existe $x \in R$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset F$. Ainsi $B(0, r) = B(x, r) - x \subset F$. Puis, pour tout $\lambda$ réel $B(0, \lambda r) = \lambda B(0, r)$ est dans $F$ : cela impose $F = E$.

## 2.6 Parties denses d'un espace espace métrique

**Définition 19** *Soit $(E,d)$ un espace métrique. On dit que $A \subset E$ est dense dans $E$ lorsque $\overline{A} = E$.*

**Remarque 2.4**
Avec les notations de la définition 19, $A$ est un ouvert dense de $E$ si et seulement si son complémentaire est un fermé sans intérieur de $E$.

**Théorème 12**
*Soient $(E,d)$ un espace métrique et $A \subset E$. Les propriétés suivantes sont équivalents.*

- $(i)$ *$A$ est dense dans $E$.*
- $(ii)$ *Tout élément de $E$ est limite d'une suite d'éléments de $A$.*
- $(iii)$ *$A$ rencontre toute boule ouverte de $E$ de rayon $r > 0$.*
- $(iv)$ *$A$ rencontre tout ouvert non vide de $E$.*

## 2.7 Invariance des notions topologiques pour des distances équivalentes.

**Théorème 13**
*Soient $E$ un ensemble, $d_1$ et $d_2$ deux distances équivalentes sur $E$.*

1. *$(E,d_1)$ et $(E,d_2)$ ont les même suites convergentes et les limites pour $d_1$ et $d_2$ sont les mêmes.*
2. *Les fermés, les ouverts, les parties bornées, les intérieurs, les frontières, les adhérences de $(E,d_1)$ et de $(E,d_2)$ coïncident.*
3. *Les notions d'applications continues et uniformément continues, de limites de fonction coïncident pour $(E,d_1)$ et de $(E,d_2)$ (voir le paragraphe correspondant plus bas).*
4. *$(E,d_1)$ et $(E,d_2)$ ont les mêmes suites de Cauchy, même parties compactes, même parties complètes.*

# 3 Complétude

## 3.1 Généralités

**Définition 20** *Une suite $(u_n)$ dans un espace métrique $(E,d)$ est dite de Cauchy lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall p \geqslant N)\,(\forall q \geqslant N)\,(d(u_n,u_q) \leqslant \varepsilon)$$

**Théorème 14**
*Soit $(u_n)$ une suite dans un espace métrique $(E,d)$.*

1. *Démontrer que si la suite $(u_n)$ est de Cauchy alors elle est bornée.*
2. *Démontrer que si la suite $(u_n)$ converge alors elle est de Cauchy.*
3. *Démontrer que si la suite $(u_n)$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence $\ell$ alors elle converge vers $\ell$.*
   *En particulier, une suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence.*
4. *On pose pour $n \in \mathbb{N}$ : $\Omega_n = \{u_k \mid k \geqslant n\}$. Démontrer que la suite $(u_n)$ est de Cauchy si et seulement si $\operatorname{diam}(\Omega_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

**Exercice 26**
Démontrer le théorème 14.

1. On suppose que la suite $(u_n)$ est de Cauchy. On prend $\varepsilon = 1$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait :
   $$d(u_N,u_n) \leqslant 1.$$
   On pose $R = \max(1, d(u_0,u_N), \ldots, d(u_{N-1},u_N))$ de sorte que la suite $(u_n)$ est dans la boule fermée $B_f(u_N,R)$.
2. On suppose que la suite $(u_n)$ est convergente. Ainsi $U_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a :
   $$d(u_n,\ell) \leqslant \varepsilon/2.$$
   Ainsi, si $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ il vient :
   $$d(u_p,u_q) \leqslant d(u_p,\ell) + d(\ell,u_q) \leqslant \varepsilon.$$
   La suite suite $(u_n)$ est donc de Cauchy.
3. Supposons que la suite $(u_n)$ soit de Cauchy et admette une valeur d'adhérence $\ell$. Il existe donc $\alpha$ extraction telle que $u_{\alpha(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :
   $$\begin{cases} d(u_p,u_q) \leqslant \varepsilon/2 & \text{pour tout } p \geqslant N_1 \text{ et } q \geqslant N_2 \\ d(u_{\alpha(n)},\ell) \leqslant \varepsilon/2 & \text{pour tout } n \geqslant N_2 \text{ et } q \geqslant N \end{cases}$$
   Posons $N = \max(N_1,N_2)$. Pour tout $n \geqslant N$ on a donc :
   $$d(u_n,\ell) \leqslant d(u_n,u_{\alpha(n)}) + d(u_{\alpha(n),\ell}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4. • Supposons que $\operatorname{diam}(\Omega_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait : $\operatorname{diam}(\Omega_n) \leqslant \varepsilon$.
Mais si $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ alors $u_p$ et $u_q$ sont dans $\Omega_N$, donc :

$$d(u_p, u_q) \leqslant \operatorname{diam}(\Omega_N) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi la suite $(u_n)$ est de Cauchy.

• Supposons que la suite suite $(u_n)$ soit de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant \mathbb{N}$ et $q \geqslant N$ on ait : $d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $x$ et $y$ dans $\Omega_N$ on a $d(x, y) \leqslant \varepsilon$ et donc : $\operatorname{diam}(\Omega_N) \leqslant \varepsilon$.
Mais la suite réelle $\big(\operatorname{diam}(\Omega_n)\big)$ est décroissante puisque si $n \in \mathbb{N}$ on a $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$. De là, pour tout $n \geqslant N$ on a : $\operatorname{diam}(\Omega_n) \leqslant \varepsilon$.

**Définition 21** *1. Un espace métrique $(E, d)$ est dit complet lorsque toute suite de Cauchy dans $E$ est convergente.*

*2. Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

**Remarque 3.1**

1. Par construction $(\mathbb{R}, |\ |)$ est complet.
2. En conséquence immédiate $(\mathbb{C}, |\ |)$ est complet.

**Théorème 15**
*Soit $X$ un ensemble non vide. Alors l'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de $X$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de $\|\ \|_\infty$, est un espace de Banach.*

**Exercice 27**
Démontrer le théorème 15

La démonstration est pour mémoire : « ce sont toutes les mêmes ».

Soit $(f_n)$ une suite de Cauchy dans $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

**Étape 1**
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \geqslant 0$ tel que pour tout $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ on ait :

$$\|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi pour $x$ fixé dans $X$ il vient, pour tout $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ :

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

A $x$ fixé dans $X$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $K$ qui est complet : elle converge vers un scalaire $f(x)$.

On a ainsi défini une fonction $f : X \to \mathbb{K}$.

**Étape 2**
Montrons que la fonction $f$ définie à l'étape 1 est dans $E$.

Comme la suite $(f_n)$ est $\|\ \|_\infty$ de Cauchy, elle est bornée d'après l'exercice **??**. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\|f_n\|_\infty \leqslant M.$$

De là si $x \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant M,$$

et on fait tendre $n$ vers $+\infty$ pour obtenir $|f(x)| \leqslant M$.

**Étape 3**
On montre que $f_n \underset{+\infty}{\overset{\|\ \|_\infty}{\longrightarrow}} f$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tout $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ on ait :

$$\|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, pour $p \geqslant N$ fixé, on obtient pour tout $q \geqslant N$, et tout $x$ dans $X$ :

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon,$$

de là $q \to +\infty$ donne : $|f_p(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, valable dès que $p \geqslant N$ et pour tout $x$ dans $X$.
Si $p \geqslant N$ on a donc $\|f_p - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

**Remarque 3.2**
Notons que $\mathbb{K}^n = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ avec $X = \{1, \ldots, n\}$ et ainsi $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$ est complet.

**Exercice 28**
Démontrer que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\ \|_2$ est un espace de Banach.

Par définition $\ell^2(\mathbb{C}) = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum |u_n|^2 \text{ converge} \right\}$.

Noter que la norme $\| \ \|_2$ sur $\ell^2(\mathbb{C})$ est issue du produit scalaire hermitien :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{u_k} v_k.$$

Soit $(u^n)$ une suite de Cauchy dans $\ell^2$ (c'est donc une suite de suites !).

**Étape 1**
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \geqslant 0$ tel que pour tout $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ on ait :

$$\|u^p - u^q\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi pour $n$ fixé dans $\mathbb{N}$ il vient, pour tout $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ :

$$|u^p(n) - u^q(n)| \leqslant \|u^p - u^q\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

A $n$ fixé dans $X$, la suite $(u^p(n))_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet : elle converge vers un complexe $u(n)$.
On a ainsi défini une suite complexe $u$.

**Étape 2**
Montrons que la suite complexe $u$ définie à l'étape 1 est dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Comme la suite $(u^n)$ est $\| \ \|_2$ de Cauchy, elle est bornée d'après l'exercice **??**. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\|u^n\|_2^2 \leqslant M \text{ i.e. } \sum_{k=0}^{+\infty} |u^n(k)|^2 \leqslant M$$

En particulier, si $n$ et $k$ sont dans $\mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^{K} |u^n(k)|^2 \leqslant M$.

On fait tendre $n$ vers $+\infty$ pour obtenir $\sum_{k=0}^{K} |u(k)|^2 \leqslant M$, valable pour tout $K$ entier. Il en résulte que la suites des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |u(k)|^2$ est majorée : cette série converge.
On a donc bien montré que $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

**Étape 3**
On montre que $u^n \xrightarrow[+\infty]{\| \ \|_2} u$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tout $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ on ait :

$$\|u^p - u^q\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, pour $p \geqslant N$, $q \geqslant N$, et tout $K$ dans $\mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{K} |u^p(k) - u^q(k)|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

A $p$ bloqué, $q \to +\infty$ donne : $\sum_{k=0}^{K} |u^p(k) - u(k)|^2 \leqslant \varepsilon^2$, valable dès que $p \geqslant N$ et pour tout $K \in \mathbb{N}$.
Il vient alors $\sum_{k=0}^{+\infty} |u^p(k) - u(k)|^2 \leqslant \varepsilon^2$ i.e. $\|u^p - u\|_2 \leqslant \varepsilon$ dès que $p \geqslant N$.

## 3.2 Propriétés importantes des espaces complets

**Théorème 16**
*Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $F \subset E$. Alors $F$ muni de la distance induite est complet si et seulement si $F$ est fermé dans $E$.*

**Exercice 29**
Démontrer le théorème 16.

- Supposons que $F$ soit complet. Soit $(x_n)$ une suite dans $F$ telle que $x_n \xrightarrow[+\infty]{} x \in E$. La suite $(x_n)$ est convergente dans $E$ donc de Cauchy, donc convergente dans $F$ et par unicité de la limite $x \in F$.
- Supposons que $F$ soit un fermé de $E$. Soit $(u_n)$ une suite de Cauchy dans $F$. Cette suite est de Cauchy dans $E$ donc elle est convergente dans $E$. Comme $F$ est fermé dans $E$ sa limite appartient à $F$ : $F$ est donc complet.

**Théorème 17**
*Dans un espace de Banach, l'absolue convergence d'une série implique sa convergence.*

**Exercice 30**
Démontrer le théorème 17.

Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach. Supposons que la série $\sum u_n$ dans $E$ soit absolument convergente.
Pour tout $p \leqslant q$ dans $\mathbb{N}$ on a :

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=p}^{q} \|u_k\| .$$

Comme la série $\sum_{k\geqslant 0} \|u_k\|$ converge, la suite $(S_n)$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ est de Cauchy, donc la suite $\left( \sum_{k=0}^{n} u_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également. Comme $E$ est complet cette dernière suite converge.

**Exercice 31**

1. **Lemme de Baire**. Soient $(E, d)$ un espace métrique complet et $(F_n)$ une suite décroissante de fermés non vide de $E$ telle que $\operatorname{diam}(F_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.
2. Donner un exemple d'espace métrique et de suite décroissante $(F_n)$ de fermés non vides de $E$ telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ et $\operatorname{diam}(F_n) \nrightarrow 0$.

1. Soit $(x_n)$ une suite dans $E$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $x_n \in F_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $p \geqslant n$ on a alors $u_n \in F_p \subset F_n$, donc :
   $$\mathrm{d}(u_n, u_p) \leqslant \operatorname{diam}(F_n).$$
   Comme $\operatorname{diam}(F_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite $(u_n)$ est de Cauchy dans $E$ : elle converge vers $\ell \in E$.
   Si maintenant $N \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n)_{n\geqslant N}$ est dans $F_N$ qui est fermé, donc $\ell \in F_N$. Il en résulte que :
   $$\ell \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} F_N.$$
   Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $\operatorname{diam}\left( \bigcap_{N\in\mathbb{N}} F_N \right) \leqslant \operatorname{diam}(F_p)$ il vient :
   $$\operatorname{diam}\left( \bigcap_{N\in\mathbb{N}} F_N \right) = 0$$

2. On prend $E = \mathbb{R}$, $F_n = [n, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 32**
Soit $(E, d)$ un espace métrique. Démontrer que « toute suite de Cauchy de $E$ converge quelque part ».

On utilise l'exercice 6. On a un plongement isométrique

$$\varphi : (E, d) \to (\mathcal{B}(E, \mathbb{R}), \| \|_\infty) .$$

Ainsi une suite de Cauchy $(u_n)$ dans $E$ va donner une suite de Cauchy $(\varphi(u_n))$ dans $(\mathcal{B}(E, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ qui est complet : cette dernière suite converge dans $(\mathcal{B}(E, \mathbb{R}))$.

# 4 Limites et continuité des fonctions entre espaces métriques

## 4.1 Limites et continuité en un point

**Définition 22** *Soient $(E, d)$ et $(F, \delta)$ deux espaces métriques, $a \in \overline{A}$ où $A$ est une partie non vide de $E$, $f : A \to F$ et $\ell \in F$.*

1. *On dit que $f$ admet $\ell$ pour limite en $a$ et on écrit $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, lorsque :*
   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in A)(d(x, a) \leqslant \alpha \Rightarrow \delta(f(x) - \ell) \leqslant \varepsilon).$$
2. *Lorsque $a \in A$, on dit que $f$ est continue en $a$ si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.*
3. *On dit que $f$ est continue sur $A$ si $f$ est continue en tout point de $A$. On note $C^0(A, F)$ l'ensemble des applications continues de $A$ dans $F$.*

**Remarque 4.1**

1. Il y a unicité de la limite lorsqu'elle existe.
2. Une fonction qui a une limite en $a$ est bornée au voisinage de $a$ : il existe $r > 0$ tel que $f$ soit bornée sur $A \cap B(a, r)$.
3. Les notions de limite en un point et de continuité en un point sont locales : par exemple, avec les notations de la définition, $f$ est continue en $a$ si et seulement si il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f\,|_V$ est continue en $a$.

4. La norme d'un espace vectoriel normé est continue, les applications coordonnées de $\mathbb{R}^n$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$ (muni de $\| \ \|_2$ pour l'instant).

**Théorème 18 (Caractérisation séquentielle de la limite et de la continuité)**
*Soient $(E,d)$ et $(F,\delta)$ deux espaces métriques, $A$ une partie non vide de $E$, $f : A \to F$.*

1. *Lorsque $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   *(i)* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
   *(ii)* *Pour toute suite $(x_n)$ dans $A$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ on a $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*
2. *Lorsque $a \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   *(i)* *$f$ est continue en $a$.*
   *(ii)* *Pour toute suite $(x_n)$ dans $A$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ on a $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.*

**Démonstration.**

1. • On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$ tel que $d(x,a,) \leqslant \alpha$ on ait $\delta(f(x),\ell) \leqslant \varepsilon$.
   Soit $(x_n)$ dans $A$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait :
   $$d(x_n,a) \leqslant \alpha.$$
   Ainsi, si $n \geqslant N$ il vient : $\delta(f(x_n),\ell) \leqslant \varepsilon$.
   • On suppose que pour toute suite $(x_n)$ dans $A$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ on a $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on n'a pas $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
   Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :
   $$(\forall \alpha > 0)(\exists x_\alpha \in E)(d(x_\alpha,a) \leqslant \alpha \ \text{ et } \ \delta(f(x_\alpha),\ell) > \ell).$$
   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 2^{-n}$, il existe donc $x_n \in E$ tel que $d(x_n,a) \leqslant 2^{-n}$ et $\delta(f(x_n),\ell) > \ell$.
   On a ainsi construit une suite $(x_n)$ dans $E$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ mais qui ne vérifie pas $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ : c'est absurde.
2. Conséquence immédiate du point précédent.

□

**Théorème 19**
*Toute fonction lipschitzienne entre espace métrique est continue*

## 4.2 Opérations classiques sur les fonctions continues.

**Théorème 20**
*Soient $(E,d)$ un espace métrique, $(F,\| \ \|_F)$ un espace vectoriel normés.*

1. *Toute combinaison linéaires de fonctions continues sur $A$ est continue sur $A$ : $C^0(A,F)$ est un sous-espaces vectoriel de $F^A$.*
2. *Le produit de deux fonctions continues sur $A$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est encore une fonction continue sur $A$.*
3. *Sous réserve d'existence, le quotient de deux fonctions continues sur $A$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur $A$.*
4. ***Composition.** Si $f$ est continue, si $B$ est une partie de $F$ contenant $f(A)$ si $g : B \to G$ est continue où $G$ est un espace vectoriel normé, alors $g \circ f$ est continue.*

**Remarque 4.2**
En particulier les fonctions polynomiales et les quotients de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ (lorsque...) sont continues.

## 4.3 Caractérisation globale de la continuité

**Théorème 21**
*Soient $(E,d)$,$(F,\delta)$ deux espaces métriques et $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
*(i)* *$f$ est continue (sur $E$).*
*(ii)* *Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $F$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $E$.*
*(iii)* *Pour tout fermé $\mathcal{F}$ de $F$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{F})$ est un fermé de $E$.*

**Remarque 4.3**
Ce théorème est très utile pour démontrer que certaines parties sont des ouverts ou des fermés d'un espace métrique.

**Exercice 33**
Démontrer le théorème 21.

$(i) \Rightarrow (ii)$ On suppose que $f$ est continue. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $F$. Supposons que $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Alors $f(x) \in \mathcal{O}$ d'où $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(a), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$.

Par continuité de $f$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in B(a, \alpha)$ on ait $f(x) \in B(f(x), \varepsilon) \in \mathcal{O}$. Ainsi : $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ et $B(a, \alpha) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. On suppose que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $F$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $E$.

Soit $a \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. L'image réciproque de la boule ouverte $B_\delta(f(a), \varepsilon) \subset F$ est un ouvert de $E$ : il existe donc $\alpha > 0$ tel que $B_d(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Ainsi, si $x \in E$ vérifie $d(a, x) \leqslant \alpha$, on aura $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$, donc $\delta(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$ : $f$ est continue en $a$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. On suppose que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $F$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $E$.

Soit $\mathcal{F}$ un fermé de $F$. Alors $\mathcal{O} = F \setminus \mathcal{F}$ est un ouvert de $F$ donc $f^{-1}(\mathcal{O}) = E \setminus f^{-1}(\mathcal{F})$ est un ouvert de $E$ donc $f^{-1}(\mathcal{F})$ est un fermé de $E$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ se montre de même.

**Exercice 34**
Justifier que $]0,1[^n$ est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_2)$. .

Notons $\varphi_k$ la fonction $k$-ième coordonnée sur $\mathbb{R}^n$. On a :

$$]0,1[^n = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(]0,1[).$$

Comme chaque $\varphi_i$ est continue (car 1-lipschitzienne), $\varphi_i^{-1}(]0,1[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ ; $]0,1[^n$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 35**
Soit $(E, d)$ un espace métrique (non vide).

1. Soit $F$ un fermé non vide de $E$. Montrer que $x \in E \setminus F$ si et seulement si $\operatorname{dist}(x, F) > 0$.
2. Démontrer que tout ouvert de $E$ est une union dénombrable de fermés de $E$.

1. Soit $x \in E$.

• Soit $x \in E$. Si $x \in \mathcal{O} = E \setminus F$ alors il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$ donc pour tout $a \in F$ on a $d(x, a) \geqslant r_x$ donc $\operatorname{dist}(x, F) \geqslant r_x > 0$.

• Réciproquement si $\operatorname{dist}(x, F) > 0$, $x \notin F$.

2. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $E$. On pose $F = \mathcal{O}$, qui est un fermé de $E$.
   — Si $F$ est non vide, on peut écrire :
   $$\mathcal{O} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{x \in E \mid \operatorname{dist}(x, F) \geqslant 2^{-n}\right\}}_{=F_n},$$
   et chaque $F_n$ est un fermé de $E$ comme image réciproque par une application continue d'un fermé de $\mathbb{R}$.
   — sinon $F$ est vide, $\mathcal{O} = E$, et pour $x_0$ point quelconque de $E$ :
   $$\mathcal{O} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_f(x_0, n).$$

## 4.4 Compléments

**Théorème 22 (Prolongement des identités)**
*Soient $(E, d)$,$(F, \delta)$ deux espaces métriques. Si deux fonctions continues $f : E \to F$ et $g : E \to F$ coïncident sur une partie dense de $E$ alors elles sont égales.*

**Exercice 36**
Démontrer le théorème 22.

On suppose que deux fonctions continues $f : E \to F$ et $g : E \to F$ coïncident sur une partie dense $D$ de $E$. Soit $x \in E$. Il existe alors une suite $(a_n)$ dans $D$ telle que $a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$. Par continuité de $f$ et $g$, on a :

$$f(a_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{et} \quad g(a_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} g(x).$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(a_n) = g(a_n)$, donc, par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$.

**Définition 23** *Soient $(E, d)$,$(F, \delta)$ deux espaces métriques et $f : E \to F$. On dit que $f$ est un homéomorphisme lorsque :*

1. *$f$ est bijective ;*
2. *$f$ est $f^{-1}$ sont continues.*

**Remarque 4.4**
Un homéomorphisme entre deux espaces métriques $E$ et $F$ est une application ouverte : elle transforme un ouvert de $E$ en un ouvert de $F$.

En effet, soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $E$. Comme $f^{-1}$ est continue, $\underbrace{(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O})}_{=f(\mathcal{O})}$ est un ouvert de $F$.

## 4.5 Applications uniformément continues

**Définition 24** *Soient $(E,d)$,$(F,\delta)$ deux espaces métriques et $f : E \to F$. On dit que $f$ est uniformément continue lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall (x,y) \in E^2)(d(x,y) \leqslant \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon).$$

**Théorème 23 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)**
*Soient $(E,d)$,$(F,\delta)$ deux espaces métriques et $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

*(i)* *$f$ est uniformément continue.*

*(ii)* *Dès que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites dans $E$ telles que $d(u_n, v_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a : $\delta\big(f(u_n), f(v_n)\big) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

**Exercice 37**
Démontrer le théorème 23.

• $(i) \Rightarrow (ii)$.
On suppose que $f$ est uniformément continue sur $E$. Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ dans $E$ qui vérifient $d(u_n, v_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est uniformément continue sur $E$ il existe $\eta > 0$ tel que les relations $(x,y) \in E^2$ et $\delta(x,y) \leqslant \eta$ impliquent $\delta(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$.
Comme $d(u_n, v_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $d(u_n, v_n) \leqslant \eta$. Alors, pour tout $n \geqslant N$ il vient :

$$\delta(f(u_n), f(v_n) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi $\delta(f(u_n), f(v_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

• $(ii) \Rightarrow (i)$.
Supposons que pour toutes les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ dans $E$ qui vérifient $d(u_n, v_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ on ait $\delta(f(u_n), f(v_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction $f$ n'est pas uniformément continue sur $E$. Ainsi :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists (x,y) \in E^2)(\delta(x,y) \leqslant \alpha \ \text{ et } \ \delta(f(x), f(y)) > \varepsilon).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 2^{-n}$, il existe donc $u_n$ et $v_n$ dans $E$ tels que $d(u_n, v_n) \leqslant 2^{-n}$ et $\delta(f(u_n), f(v_n) > \varepsilon$.
On a donc construit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ dans $I$ telles que $u_n - v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais qui ne vérifient pas $\delta(f(u_n), f(v_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ : c'est absurde.

**Exercice 38**
Démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = n$ et $v_n = n + \dfrac{1}{N}$. On a $v_n - u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $v_n 2 - u_n^2 = 2 + \dfrac{1}{n^2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 2$.

## 4.6 Le théorème du point fixe de Picard

**Théorème 24 (Le théorème du point fixe de Picard)**
*Soient $(E, \mathrm{dist})$ un espace métrique complet et $f : E \to E$. On suppose que $f$ est une contraction stricte i.e. il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout $(x,y) \in E^2$ on ait $\mathrm{dist}(f(x), f(y) \leqslant k\,\mathrm{dist}(x,y)$.*
*Pour tout $u_0 \in E$ on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
*Alors $f$ admet un unique point fixe $\ell$, et que pour tout $x \in E$ la suite des itérés $(f^n(x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ avec :*

$$\mathrm{dist}(f^n(x), \ell) \leqslant \frac{k^n}{1-k}\mathrm{dist}(f(x), x).$$

**Exercice 39**
Démontrer le théorème 24.

• **Unicité.** Si $k = 0$, $f$ est une application constante : elle n'admet donc qu'un point fixe. On s'intéresse au cas $k \in ]0,1[$. Supposons que $f$ admette deux points fixes $\ell_1$ et $\ell_2$. On a alors :

$$\mathrm{dist}(\ell_1, \ell_2) = \mathrm{dist}(f(\ell_1), f(\ell_2)) \leqslant k\mathrm{dist}(\ell_1, \ell_2).$$

Il en résulte que $(1-k)\text{dist}(\ell_1,\ell_2) \leqslant 0$ donc, puisque $k \in [0,1[$, on a $\text{dist}(\ell_1,\ell_2) = 0$ et ainsi $\ell_1 = \ell_2$.

• **Existence et convergence de la suite des itérés.** Soit $x \in E$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^n(x)$.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On a alors (inégalité triangulaire) :

$$\begin{aligned}\text{dist}(u_{n+p},u_n) &\leqslant \sum_{k=0}^{p-1}\text{dist}(u_{n+k+1},u_{n+k})\\ &\leqslant (1+k+\cdots+k^{p-1})\text{dist}(u_{n+1},u_n)\\ &\leqslant \frac{1}{1-k}\text{dist}(u_{n+1},u_n)\end{aligned}$$

Mais (récurrence immédiate) : $\text{dist}(u_{n+1},u_n) \leqslant k^n\text{dist}(f(x),x)$. On a donc :

$$\text{dist}(u_{n+p},u_n) \leqslant \frac{k^n}{1-k}\text{dist}(f(x),x).$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $u$ est de Cauchy, dans $E$ qui est complet, donc converge. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\text{dist}(u_{n+1},f(\ell)) \leqslant k\,\text{dist}(u_n,\ell) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par sandwich, on a donc $u_{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ et, par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$.
Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \geqslant 1$ entier, on a :

$$\begin{aligned}\text{dist}(u_n,\ell) &\leqslant \text{dist}(u_n,u_{n+p}) + \text{dist}(u_{n+p},\ell)\\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k}\text{dist}(f(x),x) + \text{dist}(u_{n+p},\ell).\end{aligned}$$

On fait tendre $p$ vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\text{dist}(u_n,\ell) \leqslant \frac{k^n}{1-k}\text{dist}(f(x),x).$$

**Corollaire 24.1**
*Soient $(E,\text{dist})$ un espace métrique complet et $f : E \to E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p$ soit une contraction stricte. Démontrer que $f$ admet un unique point fixe $\ell$.*

**Exercice 40**
Démontrer le corollaire 24.1.

L'application $f^p$ admet un unique point fixe $\ell \in E$. On a alors $f^p(\ell) = \ell$. Ainsi :

$$f(\ell) = f^{p+1}(\ell) = f^p(f(\ell).$$

Il en résulte que $f(\ell)$ est un point fixe de $f^p$, donc $f(\ell) = \ell$. Enfin, tout point fixe de $f$ est point fixe de $f^p$ : $f$ ne peut avoir deux points fixes distincts.

# 5 Quelques notions importantes

## 5.1 Produit fini d'espaces métriques ou d'espaces vectoriels normés

**Exercice 41**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \{1,\dots,n\}$, $(E_k,d_k)$ des espaces métriques. Pour $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $y = (y_1,\dots,y_n)$ dans $E = \prod\limits_{k=1}^{n} E_k$ on pose :

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} d_k(x_k,y_k).$$

1. Démontrer que $d_\infty$ est une distance sur $E$ : c'est la distance produit.
2. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ on considère la fonction (projection sur le facteur $E_k$) :
$$p_k = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E_k \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & x_k \end{pmatrix}$$
   a) Démontrer que chaque $p_k$ est continue.
   b) Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. Démontrer que $p_k$ est « ouverte » i.e. transforme un ouvert de $E$ en un ouvert de $E_k$.
   c) Les projections sont-elles « fermées » ?
   d) Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ on considère un ouvert $\mathcal{O}_k$ de $E_k$. Démontrer que $\mathcal{O} = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$ est un ouvert de $E$.
   La réciproque est-elle vraie ?

1. Pas de souci...
2. a) Chaque fonction $p_k$ est immédiatement 1-lipschitzienne donc continue.

b) Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $E$. Soit $y \in p_k(\mathcal{O})$. Il existe donc $x \in \mathcal{O}$ tel que $y = p_k(x)$. Comme $\mathcal{O}$ est un ouvert de $E$, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x,r) \subset \mathcal{O}$. On écrit $x = (x_1, \dots, x_n)$. Alors $B_{d_k}(y,r) \subset p_k(\mathcal{O})$.

c) Non : on prend par exemple $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$ et $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } xy = 0\right\}$ qui est un fermé de $\mathbb{R}^2$ mais...

d) • Soit $x \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$. On écrit $x = (x_1, \dots, x_n)$. Il existe $r_i > 0$ tel que $B_{d_i}(x_i, r_i) \subset \mathcal{O}_i$. En prenant $r = \min(r_1, \dots, r_n) > 0$ on a de suite $B(x,r) \subset \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$.

• Un ouvert de $E$ n'est pas nécessairement un produit de la forme $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$ avec $\mathcal{O}_i$ ouvert de $E_i$ : prendre par exemple une boule euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

**Remarque 5.1**
On définit de la même manière une notion d'espace vectoriel normé produit...

## 5.2 Fonctions composantes

**Définition 25** *Soient $(E,d)$ un espace métrique, $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \{1,\dots,p\}$, $(F_k, d_k)$ des espaces métriques. On note $F = \prod_{i=1}^{p} F_i$ que l'on munit de la distance $d_\infty$. Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$. Pour tout $x$ dans $E$ on peut écrire $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$.*
*Ces fonctions $f_k : E \to F_k$ s'appellent les fonctions composantes de $f$.*

**Remarque 5.2**
Penser au cas particulier $F_k = \mathbb{R}$ pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$.

**Théorème 25**
*On reprend les notations de la définition 25 et on considère $a \in \overline{A}$.*

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   *(1) $\lim_a f = \ell$.*
   *(2) Pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$, la fonction $f_k : E \to F_k$ admet pour limite $\ell_k$ en $a$.*
2. *Lorsque $a \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   *(1) $f$ est continue en $a$.*
   *(2) Pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$, la fonction $f_k$ est continue en $a$.*

## 5.3 Topologie trace, points isolés

On considère ici une partie non vide $A$ d'un espace métrique $(E,d)$. Alors $(A, d_A)$, où $d_A$ est la restriction de $d$ à $A^2$, est un espace métrique. Mais il faut avoir à l'esprit que beaucoup de choses peuvent avoir changées, puisque, pour $a \in A$ et $r > 0$, on a :

$$B_{d_A}(a,r) = B_d(a,r) \cap A.$$

**Théorème 26**
*Soit $A$ une partie non vide d'un espace métrique $(E,d)$.*

1. *Les ouverts de $(A, d_A)$ sont exactement les traces sur $A$ des ouverts de $(E,d)$ c'est à dire les parties de $A$ de la forme $\mathcal{O} \cap A$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $E$.*
2. *Les fermés de $(A, d_A)$ sont exactement les traces sur $A$ des fermés de $(E,d)$ c'est à dire les parties de $A$ de la forme $F \cap A$ où $F$ est un fermé de $E$.*

**Exercice 42**
Démontrer le théorème 26.

Tout provient du fait que pour $a \in A$ et $r > 0$, on a $B_{d_A}(a,r) = B_d(a,r) \cap A$

• Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $A$. Pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe alors $r_x > 0$ tel que $B_{d_A}(x, r_x) \subset A$ et ainsi :

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B_{d_A}(x, r_x) = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} (B_d(x,r) \cap A) = \underbrace{\left( \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B_d(x,r) \right)}_{=\Omega} \cap A,$$

et $\Omega$ est un ouvert de $E$.

• Soit $\Omega$ un ouvert de $E$. Si $x \in \Omega \cap A$ alors il existe $r_x > 0$ tel que $B_d(x, r_x) \subset \Omega$ donc $B_{d_A}(x, r_x) = B_d(x, r_x) \cap A \subset \Omega \cap A$.

**Exercice 43**
$[0,1[$ est-il fermé ? ouvert ?

La question n'a pas de sens !

**Définition 26** *Soient $(E,d)$ un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *Si $a \in A$, on dit que $a$ est un point isolé de $A$ lorsque $\{a\}$ est un ouvert de $A$.*
2. *On dit que $A$ est discrète lorsque tous ses points sont isolés.*

**Remarque 5.3**
Avec les notations ci-dessus, lorsque $A$ est discrète, $\mathcal{T}_A = \mathcal{P}(A)$ : c'est la même topologie que celle induite par la distance discrète $\delta$ sur $A$.

**Exercice 44**
Démontrer que toute partie discrète de $(\mathbb{R}, |\ |)$ est dénombrable. Y-a-t-il réciproque ?

• Soit $X$ une partie discrète de $\mathbb{R}$. Si $x \in X$, $\{x\}$ est un ouvert de $X$ donc il existe $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}$ tel que : $\{x\} = \mathcal{O} \cap X$. Prenons $r_x > 0$ tel que $]x - r_x, x + r_x[ \subset \mathcal{O}$.
Les intervalle $]x - r_x, x + r_x[$ sont disjoints lorsque $x$ décrit $X$ et on choisit un rationnel $q_x$ dans $]x - r_x, x + r_x[$. On a alors construit une injection :

$$i = \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ x & \longmapsto & q_x \end{pmatrix},$$

ce qui démontre que $X$ est dénombrable.

**Commentaire.** Le même type d'argument permet de montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable.

• Il n'y a pas réciproque : $\mathbb{Q}$ est dénombrable mais pas discret puisque $\mathbb{Q}$ rencontre une infinité de fois toute boule ouverte de $\mathbb{R}$.

# 6 Applications linéaires continues

## 6.1 Le théorème fondamental

**Théorème 27**
*Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels normés avec $E \neq \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

*(1) $f$ est continue.*
*(2) $f$ est lipschitzienne.*
*(3) $f$ est uniformément continue.*
*(4) Il existe $x_0 \in E$ tel que $f$ est continue en $x_0$.*
*(5) $f$ est continue en 0.*
*(6) Il existe une boule de rayon $\varepsilon > 0$ où $f$ est bornée.*
*(7) $f$ est bornée sur la boule unité fermée de $E$*
*(8) $(\exists M \geqslant 0)(\forall x \in E)(\|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E)$.*
*(9) $f$ transforme les bornés de $E$ en bornés de $F$.*

**Exercice 45**
Démontrer le théorème 27.

On a de suite (2) ⇒ (3) ⇒ (1) ⇒ (4).

(4) ⇒ (5). On suppose que $f$ est continue en $x_0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $\|x - x_0\|_E \leqslant \alpha_\varepsilon$ impliquent : $\|f(x) - f(x_0)\|_F \leqslant \varepsilon$ i.e $\|f(x - x_0)\|_F \leqslant \varepsilon$ et ainsi si $y \in E$ vérifie $\|y\|_E \leqslant \alpha_\varepsilon$, en posant $x = y + x_0$, il vient $\|x - x_0\|_E \leqslant \alpha_\varepsilon$ donc $\|f(y + x_0 - x_0)\|_F \leqslant \varepsilon$ : $f$ est continue en 0.

(5) ⇒ (6). On suppose $f$ en continue en 0. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $\|x\|_E \leqslant \alpha_\varepsilon$ impliquent : $\|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon$.
On prend alors $\varepsilon = 1$ et $f$ est bornée sur la boule fermée $\overline{B}(0, \alpha_1)$.

(6) ⇒ (7) On suppose que $f$ est bornée sur la boule fermée $\overline{B}(0,\varepsilon)$ où $\varepsilon > 0$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in \overline{B}(0,\varepsilon)$ on ait $\|f(x)\|_F \leqslant M$.
Soit $x$ dans $E$ tel que $\|x\| \leqslant 1$. On a alors $\varepsilon x \in \overline{B}(0,\varepsilon)$ donc $\|f(\varepsilon x)\|_F \leqslant M$, donc $\|f(x)\|_F \leqslant M/\varepsilon$ : $f$ est bornée sur la boule unité fermée de $E$.

(7) ⇒ (8) On suppose que $f$ est bornée sur la boule unité fermée de $E$. Il existe donc $M \geqslant 0$ réel tel que pour tout $x \in E$ vérifiant $\|x\|_E \leqslant 1$ on ait $\|f(x)\|_F \leqslant M$. Si $x \in E$ est non nul, on a alors $x/\|x\|_E$ qui est de norme 1, donc :

$$\left\| f\left( \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \leqslant M \quad \text{i.e.} \quad \|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E ,$$

cette dernière inégalité étant à posteriori valable si $x = 0$.

(8) ⇒ (9) On suppose : $(\exists M \geqslant 0)(\forall x \in E)(\|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E)$. Soit $B$ un borné de $E$. Pour tout $x$ dans $B$ il existe donc $k \geqslant 0$ réel tel que $\|x\|_E \leqslant k$. Il vient alors : $\|f(x)\|_F \leqslant kM$.
Ainsi $f(B)$ est un bornée de $F$.

(9) ⇒ (2) $f$ transforme les bornés de $E$ en bornés de $F$. Ainsi l'image de la boule unité fermée $\overline{B}_E$ de $E$ est un borné de $F$ : il existe $M \geqslant 0$

réel tel que pour tout $x \in E$ vérifiant $\|x\|_E \leqslant 1$ on ait $\|f(x)\|_F \leqslant M$. Ainsi pour tout $x$ dans $E$, non nul, on obtient $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$, inégalité encore valable si $x = 0$.
De là, par linéarité de $f$, pour tout $(x, y) \in E^2$ on a alors $\|f(x - f(y))\|_F \leqslant M\|x - y\|_E$ donc $f$ est $M$-lipschitzienne.

**Exercice 46**
On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, il existe une suite $(a_n)$ presque nulle telle que $P = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ et on pose $\|P\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.
Démontrer que $D : P \mapsto P'$ n'est pas continue.

Supposons que $D$ soit continue. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on ait :

$$\|D(P)\| \leqslant \|P\|.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $P = X^n$, il vient $\|nX^{n-1}\| \leqslant M\|X^n\|$ i.e. $n \leqslant M$, ce qui est stupide.

**Exercice 47**
Avec les notations du théorème 27, démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $(i)$ $f$ n'est pas continue.
- $(ii)$ Il existe une suite $(x_n)$ dans $E$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|f(x_n)\|_F = 1$ et $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- $(iii)$ Il existe une suite $(y_n)$ dans la sphère unité de $E$ telle que $\|f(y_n)\|_F \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si $(ii)$ est vraie, $f$ n'est pas continue en 0 (caractérisation séquentielle de la continuité).

$(i) \Rightarrow (iii)$ On suppose que $f$ n'est pas continue. Selon le point 8 du théorème 27, en prenant la négation :

$$(\forall M \geqslant 0)(\exists x \in E)(\|f(x)\|_F > M\|x\|_E).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n$ dans $E$ tel que $\|f(x_n)\|_F > n\|x_n\|_E$ (et ainsi $x_n \neq 0$).
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|_E}$. Il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|y_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad \|f(y_n)\|_F > n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ On suppose qu'il existe une suite $(y_n)$ dans la sphère unité de $E$ telle que $\|f(y_n)\|_F \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \|f(y_n)\|_F$ et, quitte à extraire, on peut supposer que $\lambda_n > 0$.
On pose encore, si $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{y_n}{\lambda_n}$ de sorte que $\|x_n\| = \dfrac{1}{\lambda_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|f(x_n)\|_F = 1$. □

## 6.2 Normes d'opérateurs

**Définition 27** *Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels normés avec $E \neq \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, espace des applications linéaires continues de $E$ dans $F$, on note :*

$$|||f||| = \sup_{x\in S_E} \|f(x)\|_F.$$

**Remarque 6.1**
Noter que si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, selon le point 8 du théorème 27, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$.
Ainsi, pour tout $x \in S_E = \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\}$, $\|f(x)\|_F \leqslant M$, donc $\{\|f(x)\|_F \mid x \in S_E\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, ce qui assure que $|||f|||$ est correctement définie dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 48**
Soit $\alpha > 0$. Démontrer que :

$$|||f||| = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\}\right\} = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in \overline{B}(0, \alpha) \setminus \{0\}\right\},$$

où $\overline{B}(0, \alpha)$ désigne la boule fermée de centre $0_E$ et de rayon $\alpha$.

• D'après la remarque 6.1, $\sup\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\}\right\}$ existe bien dans $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $x/\|x\|_E$ est dans $S_E$ donc on a :

$$\|f(x/\|x\|_E)\|_F \leqslant |||f|||,$$

et ainsi $\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant |||f|||$ donc $\sup\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\}\right\} \leqslant |||f|||$.

• Comme $S_E \subset E\backslash\{0\}$, $\underbrace{\sup_{x\in S_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}}_{=|||f|||} \leqslant \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E\setminus\{0\}\right\}$,

ce qui démontre donc l'égalité :

$$|||f||| = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E\setminus\{0\}\right\}.$$

• On a $\overline{B}(0,\alpha)\setminus\{0\} \subset E\setminus\{0\}$ donc :

$$\sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in \overline{B}(0,\alpha)\setminus\{0\}\right\} \leqslant \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E\setminus\{0\}\right\} = |||f|||.$$

• Si maintenant $(x_n)$ est une suite dans $S_E$ telle que $\|f(x_n)\|_F \underset{+\infty}{\longrightarrow} |||f|||$, la suite $(\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $B(0,\alpha)\setminus\{0\}$ et

$$\frac{\|f(\alpha x_n)\|_F}{\|\alpha x_n\|_E} = \|f(x_n)\|_F \underset{+\infty}{\longrightarrow} |||f|||$$

donc : $\sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in \overline{B}(0,\alpha)\setminus\{0\}\right\} = |||f|||$.

**Remarque 6.2**
Avec les notations ci-dessus, pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ on a, d'après l'exercice 48, pour tout $x \in E$ :

$$\|f(x)\|_F \leqslant |||f||| \, \|x\|_E.$$

De plus $|||f|||$ est le plus petit réel $M$ tel que pour tout $x \in E$ : $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$.

**Théorème 28**
*Avec les notation de la définition 27, si de plus $G$ est un espace vectoriel normé et si $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$ alors $g\circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et :*

$$|||g\circ f||| \leqslant |||g||| \, |||f|||.$$

**Exercice 49**
Démontrer le théorème 28

Soit $x \in E$. On a : $\|g\circ f(x)\|_G \leqslant |||g||| \, \|f(x)\| \leqslant |||g||| \, |||f||| \, \|x\|_E$.

Ainsi pour tout $x$ non nul dans $E$ : $\frac{\|g\circ f(x)\|_G}{\|x\|_E} \leqslant |||g||| \, |||f|||$.

Il en résulte que $|||g\circ f||| \leqslant |||g||| \, |||f|||$.

**Exercice 50**
On considère $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et pour $f$ dans $E$ on pose :

$$F_f = \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f \end{pmatrix}.$$

Soit $\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & F_f \end{pmatrix}$.

1. On munit $E$ de la norme $\|\ \|_\infty$. Démontrer que $\varphi$ est continue et trouver $|||\varphi|||$.
2. On munit $E$ de la norme $\|\ \|_1$. Démontrer que $\varphi$ est continue et et trouver $|||\varphi|||$.

1. • On peut vérifier sans peine que $\varphi$ est linéaire, et le théorème fondamental assure que pour tout $f$ dans $E$, $\varphi(f)$ est de classe $C^1$, donc dans $E$.

   • Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$ on a :

   $$|\varphi(f)(x)| = \left|\int_0^x f\right| \leqslant \int_0^x \underbrace{|f|}_{\leqslant \|f\|_\infty} \leqslant x\,\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

   Ainsi $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ ce qui assure la continuité de $\varphi$ et démontre que $|||\varphi||| \leqslant 1$.

   • Avec $f_0 : x \mapsto 1$ on a $\varphi(f_0) = f_0$ donc $\|\varphi(f_0)\|_\infty = \|f_0\|_\infty$ et ainsi $|||\varphi||| = 1$.

2. • Pour tout $f$ dans $E$ on a :

   $$\begin{aligned} \|\varphi(f)\|_1 &= \int_0^1 |\varphi(f)| = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)}_{\leqslant \|f\|_1} \mathrm{d}x. \\ &\leqslant \|f\|_1 \end{aligned}$$

   Ainsi $\varphi$ est bien continue de $(E,\|\ \|_1)$ dans lui même et on a $|||\varphi||| \leqslant 1$.

• On a beaucoup de mal à trouver une fonction $f$ dans $E$ telle que $\|\varphi(f)\|_1 = \|f\|_1$.
On cherche alors une suite $(f_n)$ de fonctions dans $E$ telle que :

$$\begin{cases} \|f_n\|_1 = 1 & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \|\varphi(f_n)\|_1 \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{cases}$$

Après quelques tests je prends la fonction $f_n$ donnée par la figure 3.

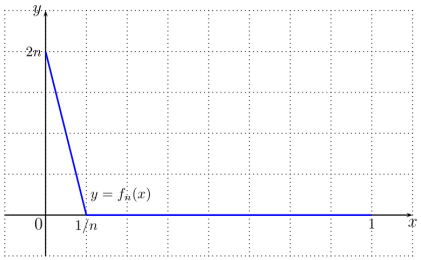



FIGURE 3 – La fonction $f_n$ dans la sphère unité de $(E, \| \ \|_1)$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi(f_n)\|_1 &= \int_0^1 \left( \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{1/n} \underbrace{\left( \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)}_{\leqslant \|f_n\|_1 = 1} \mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 \underbrace{\left( \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)}_{=1} \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{O}(\tfrac{1}{n}) + 1 - \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

**Exercice 51**
On considère $E = \mathbb{C}^n$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est considérée comme un endomorphisme de $E$.

1. Dans le cas où $E$ est muni de $\| \ \|_\infty$, démontrer que $A \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $|||A|||$.
2. Dans le cas où $E$ est muni de $\| \ \|_1$, démontrer que $A \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $|||A|||$.

Notons qu'il est tout de même maladroit, d'un point de vue pédagogique, de considérer une matrice comme un endomorphisme de $E$ : c'est plutôt un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\ldots$

1. • Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$. On a pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ :

$$|(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^n (A)_{i,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \underbrace{|x_j|}_{\leqslant \|x\|_\infty} \leqslant \left( \sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \right) \|x\|_\infty .$$

Ainsi $\|Ax\|_\infty \leqslant \underbrace{\left( \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left( \sum\limits_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \right) \right)}_{\text{indépendant de } x} \|x\|_\infty$.

Il en résulte que $A$ est continu avec $|||A||| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left( \sum\limits_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \right)$

Noter que $\sum\limits_{j=1}^n |(A)_{i,j}|$ est la somme des modules des coefficients de la ligne $i$ de la matrice $A$.

• On considère un indice $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$\sum_{j=1}^n |(A)_{i_0,j}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left( \sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \right).$$

Pour tout $j$ dans $\{1, \ldots, n\}$ on écrit $(A)_{i_0,j} = \rho_j u_j$ où $\rho_i = |(A)_{i_0,j}|$ et $u_j$ est un complexe de module 1. On considère alors le vecteur $x = (\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}) \in \mathbb{C}^n$ et il vient :

$$|(Ax)_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n |(A)_{i_0,j}| \underbrace{u_j \overline{u_j}}_{=1} \right| = \sum_{j=1}^n |(A)_{i_0,j}|$$

donc $\|Ax\|_\infty \geqslant \sum\limits_{j=1}^n |(A)_{i_0,j}|$ ce qui permet de conclure que :

$$|||A||| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left( \sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \right).$$

2. • Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} (A)_{i,j} x_j \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |(A)_{i,j}| \, |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |(A)_{i,j}| \end{aligned}$$

En notant $M = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant 1} \left( \sum\limits_{i=1}^{n} |(A)_{i,j}| \right)$, qui est indépendant de $X$, il vient donc :

$$\|Ax\|_1 \leqslant M \|x\|_1 .$$

Ainsi $A$ est bien continu et $|||A||| \leqslant M = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant 1} \left( \sum\limits_{i=1}^{n} |(A)_{i,j}| \right)$.

• On cherche (trouve !) maintenant un vecteur $x$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $\|Ax\|_1 = M \|x\|_1$ ce qui permet de conclure que $|||A||| = M$.

# 7 Compacité

## 7.1 Définition séquentielle

**Définition 28** *Un espace métrique $(E, d)$ est dit compact lorsque toute suite dans $E$ admet une valeur d'adhérence.*

**Remarque 7.1**

1. La compacité est une notion intrinsèque : elle ne dépend pas de l'espace ambiant. Si $K$ est un compact de $E$ et $E \subset E'$ alors $K$ est un compact de $E'$.
2. Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact.

   On démontre ce point. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $(u_n)$ une suite dans $[a, b]$.

   • On va construire par récurrence une suite $[a_n, b_n]$ de segments de $[a, b]$ telle l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n, b_n]\}$ soit infini.

   On suppose pour un certain $n$ que $[a_n, b_n]$ est construit. Au moins l'un des deux intervalles $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ et $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ possède la même propriété : on a ainsi construit $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

   On prend $a_0 = a$ et $b_0 = b$ pour initialiser.

   Les suite $(a_n)$ et $b_n)$ sont adjacentes : elles convergent vers la même limite $\ell \in [a, b]$.

   • On va construire par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On pose $\varphi(0) = 0$. Supposons que $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ sont construits. On pose alors :

$$\varphi(n+1) = \min \underbrace{\{k > \varphi(n) \mid u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}}_{\text{partie non vide de } \mathbb{N}} .$$

   On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$ : par sandwich, $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

**Exercice 52**
Démontrer qu'une partie compacte et discrète d'un espace métrique $(E, d)$ est finie.

Soit $K$ une partie compacte et discrète d'un espace métrique $(E, d)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $K$ soit infinie. Il existe donc une suite $(x_n)$ injective dans $K$. Il existe alors une extraction $\varphi$ telle que $x_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in K$. Comme $K$ est discret $\{\ell\}$ est un voisinage ouvert de $\ell$ dans $K$ et ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(x_{\varphi(n)})$ sont égaux à $\ell$, ce qui contredit l'injectivité de la suite $(x_n)$.

## 7.2 Propriétés

**Théorème 29**
*Une suite dans un compact qui admet une seule valeur d'adhérence est convergente.*

**Exercice 53**
Démontrer le théorème 29.

Soit $(u_n)$ une suite dans un espace métrique compact $(E, d)$ qu admet une unique valeur d'adhérence $\ell$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(u_n)$ ne converge pas vers $\ell$. Ainsi :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant N)(d(x_n, \ell) > \varepsilon).$$

Il y a donc une infinité de termes de la suite $(u_n)$ dans $K = E \setminus B(\ell, \varepsilon)$ : on peut ainsi extraire de la suite $(u_n)$ une sous-suite $(v_n)$ dans $K$ et la suite $(v_n)$ admet une valeur d'adhérence $\lambda$.
De là, la suite $(u_n)$ admet deux valeurs d'adhérences $\ell$ et $\lambda$ avec $d(\ell, \lambda) \geqslant \varepsilon$ : c'est absurde.

**Théorème 30**
*Tout espace métrique compact est complet.*

**Exercice 54**
Démontrer le théorème 30.

Soit $(E, d)$ un espace métrique compact. Si $(u_n)$ est une suite de Cauchy dans $E$, elle admet au plus une valeur d'adhérence. Comme $(E, d)$ est compact elle admet donc une unique valeur d'adhérence : elle converge selon le théorème 29.

**Théorème 31**
*Soit $K$ un compact d'un espace métrique $(E, d)$. Alors $K$ est fermé et borné dans $(E, d)$.*

**Exercice 55**
Démontrer le théorème 31.

• Soit $(u_n)$ une suite dans $K$ telle que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$. Comme $K$ est compact, $(u_n)$ admet une valeur d'adhérence dans $K$ qui doit être $\ell$ par unicité de la limite : ainsi $\ell \in K$. Par caractérisation séquentielle des fermés, $K$ est fermé dans $E$.

•. Montrons que $K$ est borné dans $E$. Par l'absurde. Soit $a \in K$ : il existe une suite $(x_n)$ dans $K$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $d(x_n, a) \geqslant n$.
Mais la suite $(x_n)$ admet une valeur d'adhérence dans $K$ : il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par continuité de la fonction distance à un point, $d(x_{\varphi(n)}, a) \underset{+\infty}{\longrightarrow} d(\ell, a)$ : c'est absurde car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $d(x_{\varphi(n)}, a) \geqslant \varphi(n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**Exercice 56**
On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$.

1. Justifier que $E$ est de dimension infinie.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $\varphi_n : x \mapsto \mathrm{e}^{i2n\pi x}$.
   a) Montrer que $(\varphi_n)$ est une suite la sphère unité de $E$.
   b) Démontrer que pour tout $p \neq q$ dans $\mathbb{N}$ on a : $\|\varphi_p - \varphi_q\|_2 = \sqrt{2}$.
   c) Démontrer que $(\varphi_n)$ n'admet pas de sous-suite convergente.
3. La réciproque du théorème 31 est-elle vraie ?

1. $E$ contient les fonctions polynômes : il est de dimension infinie.

2. a) Chaque $\varphi_n$ est continue et $\|\varphi_n\|_2 = 1$.
   b) Soient $p \neq q$ dans $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_p - \varphi_q\|_2^2 &= \int_0^1 \left|\mathrm{e}^{i2p\pi t} - \mathrm{e}^{i2q\pi t}\right|^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{i2p\pi t} - \mathrm{e}^{i2q\pi t}\right)\overline{\left(\mathrm{e}^{i2p\pi t} - \mathrm{e}^{i2q\pi t}\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \underbrace{\left(\mathrm{e}^{i2p\pi t} - \mathrm{e}^{i2q\pi t}\right)\left(\mathrm{e}^{-i2p\pi t} - \mathrm{e}^{-i2q\pi t}\right)}_{=2-\left(\mathrm{e}^{i2(p-q)\pi t}+\mathrm{e}^{-i2(p-q)\pi t}\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 2 - 2i\sin(2(p-q)\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2 - 2i\underbrace{\left\{\frac{-\cos(2(p-q)\pi t)}{2(p-q)\pi}\right\}_0^1}_{=0}
\end{aligned}$$

   c) Supposons qu'il existe une extraction $\alpha$ tq $\varphi_{\alpha(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$.
   On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sqrt{2} = \left\|\varphi_{\alpha(n)} - \varphi_{\alpha(n+1)}\right\|_2 \leqslant \left\|\varphi_{\alpha(n)} - \ell\right\|_2 + \left\|\varphi_{\alpha(n+1)} - \ell\right\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   ce qui est absurde.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|\varphi_n\|_2^2 = \int_0^1 \left|\mathrm{e}^{i2p\pi t}\right|^2 \mathrm{d}t = 1.$$

Ainsi la suite $(\varphi_n)$ est une suite dans la sphère unité de $E$ qui est fermée et bornée, et la question 2c) montre que cette dernière n'est pas compacte.

**Exercice 57**
Démontrer que $SL_2(\mathbb{R})$ n'est pas compact dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de $\| \ \|_2$.

On a $SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ et :

$$\|A_n\|_2 = \sqrt{n^2 + 1/n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi $SL_2(\mathbb{R})$ n'est pas borné dans $\| \ \|_2$.

**Théorème 32**
*Soient $(E, d)$ un espace métrique compact et $A \subset E$. Alors $(A, d_A)$ est compact si et seulement si $A$ est fermé dans $E$.*

**Démonstration.**
• Si $A$ est compact, $A$ est fermé dans $E$ d'après le théorème 31.
• Supposons que $A$ soit fermé dans $E$. Soit $(x_n)$ une suite dans $A$. Comme $E$ est compact il existe une extraction $\varphi$ telle que $x_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$ et on a donc $\ell \in \overline{A} = A$. Ainsi toute suite dans $A$ admet une valeur d'adhérence dans $A$. □

**Exercice 58**
Soient $(E, d)$ un espace métrique et $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compacte de $E$.

1. Démontrer que $\mathcal{K}$ est stable par union finie.
2. Démontrer que $\mathcal{K}$ est stable par intersection quelconque non vide.

   1. Soient $(K_1, \dots, K_p)$ dans $\mathcal{K}$. Lorsque $(u_n)$ est une suite dans $\bigcup_{i=1}^{p} K_i$, il existe $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que $K_{i_0}$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$ : on peut donc extraire une sous-suite de $(u_n)$ qui converge dans $K_{i_0}$, donc dans $\bigcup_{i=1}^{p} K_i$.
   2. Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille dans $\mathcal{K}$ telle que $K = \bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$. L'ensemble $K$ est fermé dans $E$ comme intersection de fermés de $E$. Si $i_0 \in I$, $K =\subset K_{i_0} \cap K$ donc est un fermé de $K_{i_0}$ qui est compact : $K$ est compact.

**Théorème 33**
*Un produit fini de compact est compact.*

**Démonstration.** • Soient $(E_1, d_1)$ et $(E_2, d_2)$ deux espace métriques compacts. On montre que l'espace produit $E = E_1 \times E_2$ est compact pour la distance produit $d_\infty$.
Soit $(u_n)$ une suite dans $E$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire $u_n = (x_n, y_n)$ où $x_n \in E_1$ et $y_n \in E_2$. Par compacité de $E_1$, il existe $\alpha$ extraction telle que $x_{\alpha(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E_1$. Puis posons pour $n \in \mathbb{N}$ : $z_n = y_{\alpha(n)}$. Par compacité de $E_2$, il existe $\beta$ extraction telle que

$$\underbrace{z_{\beta(n)}}_{=y_{\alpha\circ\beta(n)}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in E_2.$$

Il en résulte que $u_{\alpha\circ\beta(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} (\ell, \lambda)$ puisque :

$$d_\infty(u_{\alpha\circ\beta(n)}, (\ell, \lambda)) \leqslant d_1(x_{\alpha\circ\beta(n)}, \ell) + d_2(y_{\alpha\circ\beta(n)}, \lambda) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• On généralise à tout produit fini par récurrence. □

**Corollaire 33.1**
*Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sont exactement les parties fermées et bornées de $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_\infty)$.*

**Démonstration.** Soit $A$ une partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$. On peut donc inclure $A$ dans un pavé $K$ (produit de segments de $\mathbb{R}$) qui est un compact d'après le théorème 33. Comme $A$ est fermé dans $K$, il est compact d'après le théorème 32. □

**Théorème 34**
*Une suite décroissante de compacts non vides a une intersection non vide.*

**Exercice 59**
Démontrer le théorème 34.

Soit $(K_n)$ une suite décroissante de compacts non vides dans un espace métrique $(E, d)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on choisit un élément $x_n$ dans $K_n$

(qui est non vide). On a ainsi une suite $(x_n)$ de $K_0$ qui est compact. Il existe alors $\varphi$ extraction telle que $x_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Mais pour tout $N \in \mathbb{N}$ la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant N}$ est dans $K_N$ donc $\ell \in K_N$ puisque c'est un fermé de $E$. Il en résulte que :

$$\ell \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} K_N.$$

## 7.3 Compacité et continuité

**Théorème 35**
*L'image continue d'un compact est un compact.*

**Exercice 60**
Démontrer le théorème 35.

Soient $(K, d)$ un espace métrique compact, $(F, \delta)$ un espace métrique et $f : K \to F$ continue.
Soit $(y_n)$ une suite dans $f(K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$. Par compacité de $K$, il existe une extraction $\varphi$ telle que $x_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in K$. Par continuité de $f$ :

$$y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$$

Ainsi la suite $(y_n)$ admet une valeur d'adhérence : $f(K)$ est compact.

**Théorème 36**
*Soient $K$ un compact non vide et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes.*

**Exercice 61**
Démontrer le théorème 36.

D'après le théorème 35, $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc est borné. Posons $m = \inf_{x \in K} |f(x)|$, qui est bien défini dans $\mathbb{R}$ puisque $f(K)$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.
Il existe alors (« suite minimisante ») une suite $(x_n)$ dans $E$ telle que $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} m$.
On dispose aussi, par compacité de $K$, d'une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \mathbb{K}$.
Par continuité de $f$, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$, et par unicité de la limite $f(\ell) = m$.

**Théorème 37 (Heine)**
*Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

**Exercice 62**
Démontrer le théorème 37.

Soient $(E, d)$ un espace métrique compact, $(F, \delta)$ un espace métrique et $f : E \to F$ continue.
On raisonne par l'absurde et on suppose que $f$ n'est pas uniformément continue. Ainsi :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists (x, y) \in E^2)(d(x, y) \leqslant \alpha \ \text{ et } \ \delta(f(x), f(y)) > \varepsilon).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 2^{-n}$ on dispose donc de $x_n$ et $y_n$ dans $I$ tels que :

$$\mathrm{d}(x_n, y_n) \leqslant 2^{-n} \ \text{ et } \ \delta(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon.$$

Mais la suite $(x_n)$ est dans le compact $E$ : il existe une extraction $\varphi$ telle que la suite $(x_\varphi(n))$ converge vers $\ell \in E$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$d(y_{\varphi(n)}, \ell) \leqslant \underbrace{d(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}}_{\leqslant 2^{-n}} + d(x_{\varphi(n)}, \ell)$$

Ainsi $y_\varphi(n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par sandwich. Par continuité de $f$ il vient :

$$f(x_{\varphi(n)}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(\ell) \ \text{ et } \ f(y_{\varphi(n)}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

Ainsi $\varepsilon < \delta\big(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})\big) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est profondément stupide.

**Théorème 38 (Théorème de Poincaré)**
*Soient $(E, d)$, $(F, \delta)$ deux espaces métriques avec $E$ compact et $f : E \to F$ continue et injective. Alors $f$ induit un homéomorphisme de $E$ sur $f(E)$.*

**Exercice 63**
Démontrer le théorème 38.

Je vais donner deux preuves de ce résultat qui mettent en jeu des idées importantes. Notons qu'il faut montrer que $f^{-1}$ est continue.

• **Première idée : avec des suites.** On veut montrer que pour toute suite $(y_n)$ dans $F$ qui converge vers $y$ dans $F$ alors la suite $(f^{-1}(y_n))$ converge vers $f^{-1}(y)$.
Prenons donc $(y_n)$ suite dans $F$ qui converge vers $y$ dans $F$. Pour $n$ entier on pose $x_n = f^{-1}(y_n)$. Si $x$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)$ (il en existe puisque $(x_n)$ vit dans le compact $E$), on dispose de $\varphi$ extraction telle que

$$x_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Par continuité de $f$ on a donc $f(x_{\varphi(n)}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ i.e. $y_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
Par unicité de la limite il vient $f(x) = y$ et donc $x = f^{-1}$.
Ainsi la suite $(x_n)$ admet une seule valeur d'adhérence dans le compact $E$ : elle converge vers cette valeur d'adhérence qui est $f^{-1}(y)$.

• **Deuxième idée.** L'application $f$ est fermée i.e. transforme tout fermé de $E$ en un fermé de $F$. En effet, si $K$ est un fermé de $E$, comme $E$ est compact, $K$ est un compact. Par continuité de $f$, $f(K)$ est un compact donc un fermé de $F$. Comme $f$ est bijective, cela signifie exactement que l'image réciproque de tout fermé de $E$ par $f^{-1}$ est un fermé de $F$ : $f^{-1}$ est donc continue.

# 8 Espaces vectoriels de dimension finie

## 8.1 L'équivalence des normes

**Théorème 39**
*Sur un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

**Exercice 64**

1. Démontrer que sur $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes à $\| \ \|_\infty$.
   *On pourra utiliser les théorèmes 33.1 et 36.*
2. En déduire une démonstration du théorème 39.

1. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

• On considère la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, par inégalité triangulaire, on a :

$$\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|}_{\leqslant \|x\|_\infty} \|e_i\| \leqslant \beta \|x\|_\infty, \quad \text{où} \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|.$$

Ainsi la fonction $f = \| \ \|$ est continue de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, | \ |)$ (puisque lipschitzienne).

• La fonction $f = \| \ \|$ est donc continue sur la sphère unité $S_\infty$ de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ qui est compact (car fermé borné : voir corollaire 33.1) : elle admet un minimum $\alpha > 0$ et un maximum sur $S_\infty$ d'après le théorème 36.
En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\|x\|_\infty = 1$ on a : $\|x\| \geqslant \alpha$.
Si maintenant $y$ est non nul dans $\mathbb{R}^n$, on pose $x = \dfrac{y}{\|y\|_\infty}$ et comme $x \in S_\infty$, il vient $\|y\| \geqslant \alpha$, donc :

$$\|y\| \geqslant \alpha \|y\|_\infty, \quad \text{valable même pour } y = 0.$$

En conclusion, on a : $\alpha \| \ \|_\infty \leqslant \| \ \| \leqslant \beta \| \ \|_\infty$. Par transitivité toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

2. • Soient deux normes $N_1$ et $N_2$ sur $E$, espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 1$. On considère une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $E$.
Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose pour $j \in \{1, 2\}$ :

$$\nu_j(x) = N_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_i \varepsilon_i\right).$$

Chaque $\nu_j$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ d'où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\alpha\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \alpha\nu_1$$

De là, $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \alpha N_1$.

• Soit maintenant $E$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \geqslant 1$. Prenons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $E$ . On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to E$ définie par :

$$\varphi(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{k=1}^{2n-1} (x_k + i x_{k+1}) \varepsilon_i.$$

qui un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire. Lorsque $N_1$ et $N_2$ sont des normes sur $E$ on définit deux normes sur $\mathbb{R}^{2n}$ en posant pour $j \in \{1,2\}$ et $x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ :

$$\nu_j(x) = N_j\left(\sum_{k=1}^{2n-1}(x_k + ix_{k+1})\varepsilon_i\right).$$

On peut alors conclure comme ci-dessus.

## 8.2 Conséquences

**Corollaire 39.1**
*Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie.*

1. *$E$ est complet.*
2. *Les compacts de $E$ sont exactement les parties fermés bornées de $E$.*
3. *Toute suite bornée dans $E$ admet une valeur d'adhérence.*
4. *Toute suite bornée de $E$ qui admet une seule valeur d'adhérence converge.*

**Exercice 65**
Démontrer le corollaire 39.1.

Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. On munit $E$ de la norme :

$$\|x\|_{\beta,\infty} = \sup_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|, \quad \text{où} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Alors $\varphi_\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{pmatrix}$ est un isomorphisme linéaire isométrique de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ sur $(E, \| \|_{\beta,\infty})$.

1. Comme $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ est complet (voir remarque 3.2), $(E, \| \|_{\beta,\infty})$ l'est aussi. Par équivalence des normes sur $E$, $E$ est donc complet pour n'importe quelle norme.
2. On sait déjà que les compacts de $E$ sont fermés et bornés. Si $K$ est fermé et borné dans $E$ alors, comme $\varphi_\beta^{-1}$ est une isométrie, $\varphi_\beta^{-1}(K)$ est fermé et borné dans $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$, donc compact (voir corollaire 33.1), donc $K$ est compact (isométrique à $\varphi_\beta^{-1}(K)$).
3. Résulte immédiatement du point précédent en incluant la suite dans une boule fermée de $E$, que l'on sait alors compacte.
4. C'est une conséquence du théorème 29.

**Théorème 40**
*Soient $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$, alors $F$ est fermé dans $E$.*

**Exercice 66**
Démontrer le théorème 40.

On munit $F$ de la norme induite $\| \|_F$. Prenons une suite $(u_n)$ dans $F$ telle que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$. La suite $(u_n)$ est donc de Cauchy dans $(E, \| \|)$ donc dans $(F, \| \|_F)$ qui est de dimension finie donc complet (voir le corollaire 39.1). Ainsi cette suite converge dans $F$ et par unicité de la limite $\ell \in F$.
Par caractérisation séquentielle des fermés, $F$ est un fermé de $E$.

**Exercice 67**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\exp(M)$ est un polynôme en $M$.

Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des polynômes en $M$. Comme $F$ est de dimension fini, il est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$ et dans $F$ et $P_n(M) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \exp(M)$. Il en résulte que $\exp(M) \in F$.

## 8.3 Suites convergentes dans un espace vectoriel de dimension finie

**Théorème 41**
*Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_p)$ une base d'un espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ de dimension finie et $(u_n)$ une suite dans $E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on écrit $u_n = \sum_{k=1}^{p} x_k(n)e_k$.*

*Pour $\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

*(1) La suite $(u_n)$ converge vers $\ell$ dans $(E, \| \|)$.*
*(2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, la suite $(x_k(n))$ converge vers $\ell_k$ dans $\mathbb{K}$.*

**Démonstration.** On pose, pour $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$ dans $E$ : $N_1(x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$. Les normes $N_1$ et $\|\ \|$ sont équivalentes, ce qui donne de suite le résultat souhaité. □

## 8.4 Limite et continuité en dimension finie

Soient $(E, \|\ \|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\ \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$, $f : A \to F$. Lorsque $\beta = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $F$, pour tout $x$ dans $E$ on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i,$$

où $f_i(x)$ est la $i$-ième coordonnées de $f(x)$ dans $\beta$. Cela définit des applications $f_i : E \to \mathbb{K}$ appelés les composantes de $f$ dans $\beta$, et on écrit :

$$f = (f_1, \ldots, f_p).$$

**Théorème 42**
*Soient $(E, \|\ \|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\ \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$. Soient $\beta = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F$ « dans laquelle on écrit » on écrit $f = (f_1, \ldots, f_p)$.*

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

   *(1) $\lim_a f = \ell$.*

   *(2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, la fonction $f_k : E \to \mathbb{K}$ admet pour limite $\ell_k$ en $a$.*

2. *Lorsque $a \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

   *(1) $f$ est continue en $a$.*

   *(2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, la fonction $f_k$ est continue en $a$.*

**Démonstration.** On pose, pour $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$ dans $E$ : $N_1(x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$. Les normes $N_1$ et $\|\ \|$ sont équivalentes, ce qui donne de suite les résultats souhaités. □

## 8.5 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

**Théorème 43**
*Soient $(E, \|\ \|_E)$ un espace vectoriel normé **de dimension finie**, $(F, \|\ \|_F)$ un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $f$ est continue.*

**Démonstration.** Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Pour $x$ dans $E$ écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ dans la base $\beta$, on pose : $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.
On a ainsi définie une norme sur $E$. On a alors, pour tout $x \in E$, écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ :

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) \right\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \underbrace{\|f(e_i)\|_F}_{\leqslant M},$$

où $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f(e_i)\|_F$.
Ainsi $\|f(x)\|_F \leqslant M \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant M N_1(x)$ : l'application $f$ est $M$-lipschitzienne donc continue de $(E, N_1)$ dans $(F, \|\ \|_F)$.
Enfin $\|\ \|$ est équivalente à $N_1$ : il existe donc $B > 0$ tel que $N_1 \leqslant B \|\ \|_E$ donc $f$ est également lipschitzienne (donc continue) de $(E, \|\ \|_E)$ dans $(F, \|\ \|_F)$ □

**Définition 29** *Soient $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels. Une application $f : E_1 \times \ldots \times E_p$ est dite p-linéaire lorsque pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1, \ldots, E_p$ l'application :*

$$f_i : x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

*est linéaire de $E_i$ dans $F$.*

**Théorème 44**
*Avec les notations de la définition 29, lorsque les $E_i$ sont tous de dimension finie, les application p-linéaires sont continues.*

**Remarque 8.1**
Le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est continue.

**Exercice 68**

1. Justifier la phrase suivante : « localement le rang ne peut qu'augmenter ».
2. a) Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) En déduire que si $A$ et $B$ sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique.

1. Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $p \in \{0, \dots, n\}$, il existe une sous-matrice $B$ de $A$ avec $B \in GL_p(\mathbb{R})$. Si on perturbe « légèrement » les coefficient de $B$, par continuité du déterminant, la matrice obtenue sera toujours inversible. Ainsi en perturbant « légèrement » les coefficient de $A$ la nouvelle matrice obtenue contiendra un-sous matrice inversible d'ordre $p$ donc son rang sera supérieur à $p$.

2. a) • L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$, ouvert de $\mathbb{R}$, par l'application det qui est continue : c'est ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   • Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice $M$ a un nombre fini de valeurs propres. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ la matrice $M_n = M - 2^{-n}I$ soit inversible, et on a $M_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} M$.

   b) • Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A$ est inversible alors $\chi_{AB} = \det(XI - AB) = \det(A^{-1}(XI - AB)A) = \det(XI - BA) = \chi_{BA}$.

   • Supposons que $A$ ne soit pas inversible. Il existe alors une suite $(A_n)$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} A$.

   Ainsi pour tout $\lambda$ réel on a, par continuité de l'application det :

$$\begin{cases} \det(\lambda I - A_n B) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \det(\lambda I - AB) \\ \det(\lambda I - B A_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \det(\lambda I - BA) \end{cases}$$

   Comme pour tout $\lambda$ réel, on a $\det(\lambda I - A_n B) = \det(\lambda I - BA_n)$, il vient par unicité de la limite

$$\det(\lambda I - BA) = \det(\lambda I - AB),$$

   ce qui démontre que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

# 9 Connexité

**Notation.** Dans toute cette partie, lorsque $A$ et $B$ sont deux parties d'un ensemble $X$, on écrira $E = A \sqcup B$ lorsque $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

## 9.1 Généralités

**Définition 30** *Un espace métrique $(E, d)$ est dit connexe si les seuls ouverts-fermés de $E$ sont $\emptyset$ et $E$.*

**Théorème 45**
*Soit $(E, d)$ un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- $(i)$ *$(E, d)$ est connexe*
- $(ii)$ *Il n'existe pas de partition stricte de $E$ en deux ouverts ou en deux fermés de $E$ i.e. si $A$ et $B$ sont deux parties de $E$ avec $A \sqcup B = E$ et $A$ et $B$ ouverts (ou fermés) dans $E$ alors $A = \emptyset$ ou $A = E$.*

**Exercice 69**
Démontrer le théorème 45.

• $(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons que $(E, d)$ soit connexe. Supposons que $E = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ at $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ ouverts de $E$. Alors $\mathcal{O}_1 = E \setminus \mathcal{O}_2$ est un fermé de $E$. Ainsi $\mathcal{O}_1 = E$ ou $\mathcal{O}_2 = E$.

• $(ii) \Rightarrow (i)$. On suppose $(ii)$. Si $A$ est un ouvert et fermé de $E$, alors $E = A \sqcup A^c$ et $A^c$ est un ouvert et fermé de $E$, donc $A = \emptyset$ ou $A = E$.

**Remarque 9.1**
**La connexité sert à prouver des propriétés universelles**. Plus précisément, si $(E, d)$ est un espace métrique connexe et si $\mathcal{P}(x)$ est une propriété qui dépend de $x$ dans $E$, pour montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x$ dans $E$, on considère l'ensemble $A = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\}$ et on montre successivement que $A \neq \emptyset$, $A$ est ouvert dans $E$ puis $A$ est fermé dans $E$, ce qui démontre que $A = E$.

**Exercice 70**

1. Décrire explicitement tous les espaces métriques discrets connexes.
2. $\mathbb{Q}$ muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$ est-il connexe ?

1. Supposons que $(E,d)$ soit un espace métrique discret connexe. Comme $E$ est discret, tout singleton de $E$ est un ouvert et fermé de $E$. Ainsi, dès que $x_0 \in E$ on peut écrire :

$$E = \{x_0\} \sqcup \{x_0\}^c,$$

où $\{x_0\}$ et $\{x_0\}^c$ sont deux fermés de $E$, ce qui est absurde dès que $\#E > 1$.

2. On peut écrire $\mathbb{Q} = A \sqcup B$ avec ;

$$\begin{cases} A &= \mathbb{Q} \cap ]-\infty, \sqrt{2}[ \text{ ouvert non vide de } \mathbb{Q} \text{ par trace} \\ B &= \mathbb{Q} \cap ]\sqrt{2}, +\infty[ \text{ ouvert non vide de } \mathbb{Q} \text{ par trace} \end{cases}$$

**Remarque 9.2**

1. $\emptyset$, un singleton sont des espaces connexes.
2. $\mathbb{R}*$ est disconnexe puisque $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \sqcup \mathbb{R}_-^*$ et $R_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^*$ par trace.

**Théorème 46**
$\mathbb{R}$ *est connexe.*

**Exercice 71**
Démontrer le théorème 46.

Soit $A$ un ouvert fermé non vide de $\mathbb{R}$. Montrons que $A = \mathbb{R}$.
Soit $a \in A$. L'ensemble $\mathcal{E}_a$ des intervalles ouverts inclus dans $A$ qui contiennent $a$ possède un plus grand élément pour l'inclusion qui est :

$$I = \bigcup_{J \in \mathcal{E}_a} J.$$

Cet intervalle $I$ est non majoré.

En effet, supposons que $I$ soit majoré. On peut donc écrire $I = ]*, \beta[$ où $* \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Ainsi $\beta \in \overline{A} = A$ puisque $A$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Comme $A$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $r > 0$ tel que $]\beta - r, \beta + r[ \subset A$.
De là $]*, \beta + r[$ est un intervalle ouvert contenu dans $A$, qui contient $a$ et qui contient strictement $I$ : c'est stupide.

De la même manière $I$ est non minorée, donc $I = \mathbb{R}$ et ainsi $A = \mathbb{R}$.

**Définition 31** *Soient $(E,d)$ un espace métrique et $A \subset E$. On dit que $A$ est un sous-espace connexe lorsque $(A, d_A)$ est un espace métrique connexe.*

**Exercice 72**
Démontrer que si $A$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ alors $A$ est un intervalle.

Soit $A$ une partie connexe de $\mathbb{R}$, non vide. Supposons qu'il existe $u < v$ dans $A$. Montrons que tout élément $x$ de $]u,v[$ est encore dans $A$.
Par l'absurde : il existe $x_0 \in ]u,v[$ tel que $x_0 \notin A$. On a alors :

$$A = (]-\infty, x_0[ \cap A) \sqcup (]x_0, +\infty[ \cap A),$$

avec :

$$\begin{cases} ]-\infty, x_0[ \cap A & \text{ouvert de } A \text{ par trace, qui contient } u \\ ]x_0, +\infty[ \cap A & \text{ouvert de } A \text{ par trace, qui contient } v \end{cases}$$

C'est absurde.

## 9.2 Propriétés des espaces connexes

**Théorème 47**
*Soient $(E,d)$ un espace métrique, $A \subset B \subset \overline{A} \subset E$. On suppose que $A$ est connexe. Alors $B$ est connexe et en particulier $\overline{A}$ est connexe.*

**Démonstration.** Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ des ouverts de $B$ tels que :

$$B = \mathcal{O}_1 \sqcup \mathcal{O}_2.$$

On pose $U_1 = \mathcal{O}_1 \cap A$ et $U_2 = \mathcal{O}_2 \cap A$, qui sont tous les deux des ouverts de $A$ par trace.
De plus on a $A = U_1 \sqcup U_2$. Par connexité de $A$, il vient (quitte à changer les indices) $U_1 = \emptyset$ et $U_2 = A$. Ainsi :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_1 \cap A = \emptyset \\ A \subset \mathcal{O}_2 \end{cases}$$

Supposons un instant que $\mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Il existe alors $x \in \mathcal{O}_1 \subset B \subset \overline{A}$. Comme $\overline{A} \cap B = B$, $x$ est adhérent à A dans $B$ donc $A$ rencontre tout voisinage de $x$ et ainsi $\mathcal{O}_1 \cap A \neq \emptyset$ ce qui est absurde.
En définitif on a $\mathcal{O}_1 = \emptyset$ et $\mathcal{O}_2 = B$ : $B$ est connexe selon le théorème 45. □

**Théorème 48**
*Soient $(E,d)$ un espace métrique, $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces connexes de $E$ telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.*
*Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

**Démonstration.** Notons $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ des ouverts de $A$ tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 &= A \\ \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 &= \emptyset \end{cases}$$

Pour tout $i \in I$, on a l'alternative suivante :

— ou bien $A_i \subset \mathcal{O}_1$ ;
— ou bien $A_i \subset \mathcal{O}_2$.

En effet $A_i \cap \mathcal{O}_1$ et $A_i \cap \mathcal{O}_2$ sont des ouverts disjoints de $A_i$ et on a :

$$A_i = (A_i \cap \mathcal{O}_1) \sqcup (A_i \cap \mathcal{O}_2),$$

ce qui amène par connexité de $A_1$ soit $A_i \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ soit $A_i \cap \mathcal{O}_1 = A_i$.
Prenons maintenant $x$ dans $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A = \mathcal{O}_1 \sqcup \mathcal{O}_2$. Quitte à changer les indices, on a $x \in \mathcal{O}_1$. Ainsi, **pour tout** $i \in I$ on a $A_i \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$, ce qui force, avec l'alternative précédente, $A_i \subset \mathcal{O}_1$.
Il vient donc : $A \subset \mathcal{O}_1$ : $A$ est connexe. □

**Exercice 73**
Soient $(E,d)$ un espace métrique, $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une famille de sous-espaces connexes de $E$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on ait : $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$.
Démontrer que $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ est connexe.

On pose $A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k$. Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ des ouverts de $A$ tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 &= A \\ \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 &= \emptyset \end{cases}$$

• Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$. Prenons donc $x_k \in A_k \cap A_{k+1} \subset A$. Il existe donc $j \in \{1,2\}$ tel que $x_k \in \mathcal{O}_j$. Ainsi $A_k$ et $A_{k+1}$ intersectent tous les deux $\mathcal{O}_1$. Mais $\mathcal{O}_j \cap A_k$ et $\mathcal{O}_j \cap A_{k+1}$ sont des ouverts fermés non vides de $A_k$ et $A_{k+1}$ respectivement. Comme $A_k$ et $A_{k+1}$ sont connexes, il vient :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_j \cap A_k &= A_k \\ \mathcal{O}_j \cap A_{k+1} &= A_{k+1} \end{cases}$$

et ainsi $A_k$ et $A_{k+1}$ sont contenus dans $\mathcal{O}_j$.

• Ainsi (l'écrire, par exemple en raisonnant par l'absurde) $A_k \subset \mathcal{O}_j$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et donc $A = \mathcal{O}_1$ : $A$ est connexe.

## 9.3 Composantes connexes

**Théorème-définition 49**
*Soient $(E,d)$ un espace métrique et $a \in E$.*

1. *L'ensemble des connexes de $E$ qui contiennent $a$ admet un plus grand élément pour l'inclusion appelé composante connexe de $a$ dans $E$.*
2. *Deux composantes connexes de $E$ sont soit disjointes, soit égales.*
3. *Une composante connexe de $E$ est fermée dans $E$.*

**Exercice 74**
Démontrer le théorème 49.

1. Notons $\mathcal{C}_a$ l'ensemble des connexes de $E$ qui contiennent $a$. Alors $\bigcup_{A\in\mathcal{C}_a} A$ est un connexe de $E$ via le théorème 48, et c'est le plus grand pour l'inclusion.
2. Supposons que $C_1$ et $C_2$ soient deux composantes connexes de $E$. Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ $C_1$ et $C_2$ sont les plus grands connexes de $E$ qui contiennent tout éléments $x$ de $C_1 \cap C_2$ donc $C_1 = C_2$.
3. Soit $C$ la composante connexe de $a$ dans $E$. D'après le théorème 47, $\overline{C}$ est un connexe de $E$ qui contient $a$, donc $C = \overline{C}$.

**Définition 32** *Un espace métrique est dit totalement disconnexe lorsque toutes ses composantes connexes sont réduites à un point.*

**Exercice 75**
1. Justifier qu'un espace métrique discret est totalement disconnexe.
2. Démontrer que $\mathbb{Q}$ est totalement disconnexe.

1. Si $(E,d)$ est discret, si $a \in E$, la composante connexe de $a$ est $C = \{a\}$. En effet, dans le cas contraire, il existe une partie non vide $A$ de $E$ telle que :

$$C = \{a\} \sqcup A.$$

Mais $A$ est un ouvert de $E$, puisque $\mathcal{T}_E = \mathcal{P}(E)$, donc de $C$ par trace. Comme $\{a\}$ est aussi un ouvert de $C$, on obtient une contradiction avec le fait que $C$ est connexe.

2. $\mathbb{Q}$ n'est pas discret puisque tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ rencontre une infinité de fois $\mathbb{Q}$. Puis soit $a \in \mathbb{Q}$ Supposons que la composante connexe de $a$ dans $\mathbb{Q}$ contienne un éléemnt $b > a$. Prenons un irrationnel $c \in ]a,b[$. On a alors :

$$C = (C \cap ]-\infty, c[) \cup (C \cap ]c, +\infty[).$$

Mais $C \cap ]-\infty, c[$ et $C \cap ]c, +\infty[$ sont des ouverts de $C$ (par trace), disjoints et non vides : c'est absurde puisque $C$ est connexe.

## 9.4 Connexité et applications continues

**Théorème 50**
*L'image continue d'un connexe est un connexe. Autrement dit si $f : E \to F$ est continue où $(E,d)$, $(F,\delta)$ sont des espaces métriques et si $E$ est connexe, alors $f(E)$ est connexe.*

**Exercice 76**
Démontrer le théorème 50.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert fermé non vide de $f(F)$. Alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert fermé non vide de $E$ qui est connexe, donc $f^{-1}(\mathcal{O}) = E$ et, comme $\mathcal{O} \subset f(E)$, on a :

$$\mathcal{O} = f\big(f^{-1}(\mathcal{O})\big) = f(E).$$

**Exercice 77**
Démontrer que $]-1,1[$ est connexe puis que $\overline{\mathbb{R}}$ est connexe.

• $]-1,1[$ est l'image de $\mathbb{R}$ connexe par l'application continue $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.

• Ainsi $[-1,1]$ est connexe et $\overline{\mathbb{R}}$ est l'image de $[-1,1]$ par l'application continue :

$$x \mapsto \begin{cases} \tan(2x/\pi) & \text{si } x \in ]-1,1[ \\ +\infty & \text{si } x = 1 \\ -\infty & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

**Corollaire 50.1**
*Soient $(E,d)$ un espace métrique connexe non vide, $(F,\delta)$ un espace métrique discret. Si $f : E \to F$ est continue alors $f$ est constante.*

**Démonstration.** Comme $E$ est connexe et $f$ continue, $f(E)$ est un sous-espace connexe de $F$ donc un singleton. □

**Exercice 78**
Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$ on ait : $f(x)^2 - 3f(x) - 2 = 0$.

Si $f$ convient, le discriminant du trinôme en $f(x)$ est 17 et ainsi $f(x) = \dfrac{3 + \varepsilon(x)\sqrt{17}}{2}$ où $\varepsilon : \mathbb{R} \to \{-1,1\}$. Comme $f$ est continue, $\varepsilon$ aussi et elle est à valeurs dans un discret, donc est constante...

**Théorème 51**
*Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les convexes de $\mathbb{R}$ i.e. les intervalles de $\mathbb{R}$.*

**Exercice 79**
Démontrer le théorème 51

• On sait déjà (voir exercice 72) que tout connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle.

• Prenons un intervalle de la forme $]a,b[$. Il est homéomorphe (par une fonction affine) à $]-1,1[$ qui est connexe, donc connexe. Le théorème 47 assure alors que les intervalles $]a,b]$, $[a,b[$ et $[a,b]$ sont connexes.
Il reste à voir le cas d'un intervalle de la forme $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,a[$ (on utilise encore le théorème 47 pour l'adhérence dans $\mathbb{R}$).
On considère $h : \mathbb{R} \to ]a,+\infty[$ définie pour $x > a$ par $h(x) = a + \mathrm{e}^x$. Cette fonction est continue et surjective. Comme $\mathbb{R}$ est connexe, $]a,+\infty[$ est aussi connexe.

**Corollaire 51.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**
*L'image continue d'un intervalle par une fonction continue à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est un intervalle.*

## 9.5 Produit fini de connexes

**Théorème 52**
*Soient* $(E_i, d_i)$ *des espaces métriques (pour* $i \in \{1, \dots, n\}$*) et* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ *l'espace métriques produit. Alors* $E$ *est connexe si et seulement si chaque* $E_i$ *est connexe.*

**Démonstration.**
• Si $E$ est connexe, chaque projection est continue, donc chaque $E_i$ est connexe.

• Je démontre le résultat pour $n = 2$ (faire une récurrence après).
Soit $m = (x_0, y_0) \in E = E_1 \times E_2$.
On note $C$ la composante connexe de $m$ et on montre que $C = E$.
Pour tout $y \in E_2$, $(x_0, y)$ est dans $C$ car $\{x_1\} \times E_2$ est connexe (puisque homéomorphe à $E_2$) et contient $m$ et $(x_0, y)$.
Si maintenant $(x, y) \in E$, $(x, y)$ est aussi dans $C$ car $E_1 \times y$ est connexe (puisque homéomorphe à $E_1$) et contient $m$ et $(x, y)$. □

**Remarque 9.3**
Ainsi $\mathbb{R}^n$ est connexe.

# 10 Connexité par arcs

## 10.1 Généralités

**Définition 33** *Un chemin dans un espace métrique* $(E, d)$ *est une application continue* $c : [0, 1] \to E$.

**Définition 34** *Soit* $(E, d)$ *un espace métrique et* $A \subset E$.

1. *On dit que* $E$ *connexe par arcs lorsque deux points quelconques de* $E$ *sont reliés par un chemin dans* $E$.
2. *On dit que* $A$ *est connexe par arcs lorsque* $(A, d_A)$ *est connexe par arcs.*

**Remarque 10.1**
1. Si $(E, d)$ est un espace métrique, si $x$, $y$ et $z$ sont dans $E$ et si $c_1$ est un chemin de $x$ à $y$ dans $E$, $c_2$ un chemin de $y$ à $z$ dans $E$ alors :
$$c : t \mapsto \begin{cases} c_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ c_2(2t - 1/2) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$
est un chemin de $x$ à $z$ dans $E$.
2. Toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.
3. Toute partie étoilée $A$ d'un espace vectoriel normé (i.e. une partie $A$ de $E$ telle que tout point de $A$ est relié à un point fixe $x_0$ dans $A$ par un chemin dans $A$) est connexe par arcs.

## 10.2 Propriétés des espaces connexes par arcs

**Théorème 53**
*Soient* $(E, d)$ *un espace métrique,* $(A_i)_{i \in I}$ *une famille non vide de sous-espaces connexes par arcs de* $E$ *« qui s'intersectent deux à deux ».*
*Alors* $\bigcup_{i \in I} A_i$ *est connexe par arcs.*

**Exercice 80**
Démontrer le théorème 53.

Soient $x$ et $y$ dans $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Il existe $i$ et $j$ dans $I$ tels que $x \in A_i$ et $y \in A_j$. Mais $A_i$ et $A_j$ s'intersectent : il existe $z \in A_i \cap A_j$. Comme $A_i$ est connexe par arcs, il existe un chemin de $x$ à $z$ dans $A_i$. Comme $A_j$ est connexe par arcs, il existe un chemin de $z$ à $y$ dans $A_j$. On a donc un chemin de $x$ à $y$ dans $A_i \cup A_j \subset A$. Il en résulte que $A$ est connexe par arcs.

## 10.3 Composantes connexes par arcs

**Théorème-définition 54**
*Soient* $(E, d)$ *un espace métrique et* $a \in E$.

1. *L'ensemble des connexes par arcs de* $E$ *qui contiennent* $a$ *admet un plus grand élément pour l'inclusion appelé composante connexe par arcs de* $a$ *dans* $E$.
2. *La composante connexe par arcs de* $a$ *est incluse dans la composante connexe de* $a$.

3. *Deux composantes connexes par arcs de $E$ sont soit disjointes, soit égales.*
4. *Deux points de $E$ appartiennent à une même composantes connexe par arcs si et seulement s'ils sont reliés par un chemin dans $E$.*

**Exercice 81**
Démontrer le théorème 54.

1. Soit $\Gamma_a$ l'ensemble des connexes pars arcs de $E$ qui contiennent $a$. Alors $\bigcup_{C\in\Gamma_a} C$ est un connexe par arcs (d'après le théorème 53) : c'est la composante connexe par arcs de $a$ dans $E$.
2. Notons $C$ la composante connexe par arcs de $a$. Lorsque $b \in C$, il existe un chemin $\gamma$ de $a$ à $b$ dans $C$ c'est à dire une application continue $\gamma : [0,1] \to C$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Comme $\gamma$ est continue $\gamma([0,1])$ est un connexe qui contient $a$ (et $b$), donc est inclus dans la composante connexe de $a$, donc $b$ appartient à celle-ci.
3. Soient $C_1$ et $C_2$ deux composantes connexes par arcs de $E$. Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, pour tout $x \in C_1$ et $y \in C_2$ on peut construire un chemin de $x$ à $y$ donc $y$ est dans $C_1 \cap C_2$ est un connexe par arcs qui contient $x$ et $y$ donc qui est contenu dans $C_1$ et $C_2$.
4. Pour vous, c'est pas compliqué...

## 10.4 Connexité et applications continues

**Théorème 55**
*L'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.*

**Exercice 82**
Démontrer le théorème 55.

Soient $(E,d)$ un espace métrique connexe par arcs, $(F,\delta)$ un espace métrique et $f : E \to F$ continue.
Soient $x$ et $y$ dans $f(E)$. Il existe alors $u$ et $v$ dans $E$ tels que $f(u) = x$ et $f(v) = y$. Comme $E$ est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma$ de $u$ à $v$. Alors $f \circ \gamma$ est un chemin de $x$ à $y$.

## 10.5 Connexité par arcs versus connexité

**Théorème 56**
*Tout espace connexe par arcs est connexe.*

**Exercice 83**
Démontrer le théorème 56.

Soient $(E,d)$ un espace métrique connexe par arcs et $a \in E$. Alors la composante connexe par arcs de $a$ est $E$ mais cette dernière est incluse dans la composante connexe de $a$. Il en résulte que la composante connexe de $a$ est $E$ : $E$ est connexe.

**Exercice 84**
On pose $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > \quad \text{et} \quad y = \sin(1/x)\}$ et $X = A \cap \{(0,0)\}$.

1. Démontrer que $A$ est connexe par arcs et que $A$ est connexe.
2. Démontrer que si $m \in A$ alors $A \setminus \{m\}$ et $X \setminus \{m\}$ sont disconnexes.
3. Démontrer que $X$ n'est pas connexe par arcs.

Celui là, il est pour vous.

# 11 Compléments

## 11.1 Produit dénombrables d'espaces métriques

**Exercice 85**
Soit $(E_n, d_n)$ une famille d'espace métriques telle que chaque distance $d_n$ soit bornée par 1. On considère l'ensemble produit $E = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Ainsi, tout élément $x$ de $E$ s'écrit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque $x_k$ est dans $E_k$.
On fixe $\lambda > 1$ réel.

1. Démontrer que l'on définit correctement une distance sur $E$ en posant, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E$ :
$$d_\lambda(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} d_n(x_n, y_n).$$
2. On note $\mathcal{T}_\lambda$ l'ensemble des ouverts de $(E, d_\lambda)$.
Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de $E$ de la forme $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ où la famille $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}_n$ est un ouvert de $E_n$ ;
— L'ensemble des $n$ entiers tels que $\mathcal{O}_n \neq E_n$ est fini.

a) Démontrer que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_\lambda$.
b) Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}_\lambda$ i.e. que tout ouvert de $E$ est union d'éléments de $\mathcal{B}$.

3. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathrm{pr}_n : E \to E_n$ la projection naturelle. Démontrer que $\mathcal{T}_\lambda$ est la moins fine des topologies métriques qui rendent continue toutes les applications $\mathrm{pr}_n$, i.e. si $\mathcal{T}_\delta$ est l'ensemble des ouverts de $(E, \delta)$ où $\delta$ est une distance sur $E$ alors $\mathcal{T}_\lambda \subset \mathcal{T}_\delta$.

4. **Propriété universelle de l'espace métrique produit** $E$.
Soient $(X, \delta)$ un espace métrique et $f : X \to E$. Alors $f$ est continue si et seulement si chaque $\mathrm{pr}_n \circ f : X \to E_n$ est continue.

1. • Comme chaque $d_n$ est bornée par 1, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\lambda^{-n} d_n(x_n, y_n) \leqslant \lambda^{-n}.$$

Ainsi, puisque la série $\sum \lambda^{-n}$ converge (série géométrique), la $d_\lambda(x, y)$ est correctement défini.

• La symétrie et la séparation sont immédiates.

• Pour l'inégalité triangulaire, on prend $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E$. Pour tout $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} 2^{-\lambda} d_n(x_n, z_n) &\leqslant \sum_{n=0}^{N} 2^{-\lambda} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n=0}^{N} 2^{-\lambda} d_n(y_n, z_n) \\ &\leqslant d_\lambda(x, y) + d_\lambda(y, z)\end{aligned}$$

donc $d_\lambda(x, z) \leqslant d_\lambda(x, y) + d_\lambda(y, z)$.

2. a) Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{B}$. On écrit $\mathcal{O} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ et on considère $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N + 1$ on ait $\mathcal{O}_n = E_n$.
Soit $a \in \mathcal{O}$ avec $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \{0, \ldots\}$ il existe $r_n > 0$ tel que $B_{d_n}(a_n, r_n) \subset \mathcal{O}_n$.
On pose $r = \min_{0\leqslant n\leqslant N} \lambda^{-n} r_n$. Si $x \in B_{d_\lambda}(a, r)$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} d_n(a_n, x_n) < r,$$

donc, pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$ on a $\lambda^{-n} d_n(a_n, x_n) < \lambda^{-n} r_n$ et ainsi $x_n \in \mathcal{O}_n$. De là on a bien $x \in \mathcal{O}$.

b) Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_\lambda$. Pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$ et donc $\mathcal{O} = \bigcup_{x\in\mathcal{O}} B(x, r_x)$.
Il suffit alors de montrer que toute boule ouverte de $(E, d_\lambda)$ est union d'éléments de $\mathcal{B}$.
On prend $a \in E$ avec $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $r > 0$. Pour $x \in B_{d_\lambda}(a, r)$, avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on veut montrer l'existence d'un élément $\mathcal{O}_x$ de $\mathcal{B}$ tel que $x \in \mathcal{O}_x \subset B_{d_\lambda}(a, r)$.
On pose $\varepsilon = r - d_\lambda(a, x)$. Comme la série $\sum \lambda^{-n}$ converge son reste converge vers 0 et il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda^{-n} \leqslant \varepsilon/2$.
Pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$ on pose :

$$r_n = \frac{\varepsilon \lambda^n}{2(N+1)} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_n = B_{d_n}(x_n, r_n).$$

Si $n \geqslant N + 1$, on pose $\mathcal{O}_n = E_n$.
Ainsi $\mathcal{O}_x = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ est un élément de $\mathcal{B}$ et tout est fait pour que $x \in \mathcal{O}_x \subset B_{d_\lambda}(a, r)$.

3. • Soient $(x, y) \in E^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$d_n(\mathrm{pr}_n(x), \mathrm{pr}_n(y)) \leqslant \lambda^n d_\lambda(x, y),$$

donc $\mathrm{pr}_n$ est lipschitzienne donc continue.

• Soit maintenant $\delta$ une distance sur $E$ telle que toute les projections $\mathrm{pr}_n$ soient continues de $(E, \delta)$ dans $(E_n, d_n)$.
Pour conclure, d'après la question précédente, il suffit de démontrer que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_\delta$.
Soit $\mathcal{O} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ un élément de $\mathcal{B}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N + 1$ on ait $\mathcal{O}_n = E_n$.
Pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, $\Omega_n = \mathrm{pr}_n^{-1}(\mathcal{O}_n)$ est un ouvert de $(E, \delta)$ par continuité de $\mathrm{pr}_n$.
Ainsi $\Omega = \bigcap_{0\leqslant i\leqslant N} \Omega_i$ est un ouvert de $(E, \delta)$.
Mais il est facile de vérifier que $\Omega = \mathcal{O}$.

En effet, si $x \in E$, avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors on a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \otimes &\Leftrightarrow (\forall n \in \{0,\dots,N\})(x \in \mathrm{pr}_n^{-1}(\mathcal{O}_n)) \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \{0,\dots,N\})(x_n = \mathrm{pr}_n(x) \in \mathcal{O}_n)) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{O} \end{aligned}$$

4. • Si $f$ est continue alors, par composition, chaque $\mathrm{pr}_n \circ f$ l'est.

   • On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \mathrm{pr}_n \circ f$ est continue.
   Pour montrer que $f$ est continue, comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}_\lambda$, il suffit de montrer que pour tout $\mathcal{O} \in \mathcal{B}$ l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $(X,\delta)$.
   Soit $\mathcal{O} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ dans $\mathcal{B}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N+1$ on ait $\mathcal{O}_n = E_n$.
   On a alors $f^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcap_{n=0}^{N} f_n^{-1}(\mathcal{O}_n)$.
   En effet si $x \in E$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\mathcal{O}) &\Leftrightarrow f(x) \in \mathcal{O} \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \{0,\dots,N\})(f_n(x) \in \mathcal{O}_n) \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{n=0}^{N} f_n^{-1}(\mathcal{O}_n) \end{aligned}$$

   Comme chaque $f_n$ est continue de $X$ dans $E_n$, pour tout $n \in \{0,\dots,N\}$, $f_n^{-1}(\mathcal{O}_n)$ est un ouvert de $X$ donc $\mathcal{O}$ aussi.

**Remarque 11.1**
On peut noter que $\mathcal{T}_\lambda$ ne dépend en fait pas de $\lambda > 1$, puisque c'est le cas de $\mathcal{B}$.

## 11.2 Produit dénombrable d'espaces métriques compacts

**Exercice 86**
On reprends les notations de l'exercice 85. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'espace métrique $(E_n, d_n)$ est compact.
Démontrer que $(E, d_\lambda)$ est compact.

Soit $\left(x^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dans $E$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on écrit : $x^{(p)} = \left(x_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Comme $\left(x_0^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $E_0$ compact, il existe $\varphi_0$ extraction telle que la suite $\left(x_0^{(\varphi_0(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_0 \in E_0$.
— Comme $\left(x_1^{(\varphi_0(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $E_1$ compact, il existe $\varphi_1$ extraction telle que la suite $\left(x_1^{(\varphi_0\circ\varphi_1(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_1 \in E_1$.
— ...
On construit donc ainsi une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'extraction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $\left(x_n^{(\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_n(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $x_n$ de $E_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\varphi(x) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$.
Alors $\varphi$ est un extraction (le vérifier !) et la suite $\left(x^{(\varphi(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E$.

En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$d_\lambda(x^{(\varphi(p))}, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} d_n(x_n^{(\varphi(p))}, x_n)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N+1$ on ait :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda^{-n} d_n(x_n^{(\varphi(p))}, x_n) \leqslant \varepsilon/2$$

puisque la série $\sum_{n\geqslant 0} \lambda^{-n} d_n(x_n^{(\varphi(p))}, x_n)$ converge.
Puis pour tout $n \in \{0,\dots,N\}$ il existe $P_n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant P_n$ on ait :

$$d_n(x_n^{(\varphi(p))}, x_n) \leqslant \frac{\varepsilon\lambda^n}{2(N+1)}.$$

Si $p \geqslant P = \max_{0\leqslant n\leqslant N} P_n$ alors on aura :

$$d_\lambda(x^{(\varphi(p))}, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} d_n(x_n^{(\varphi(p))}, x_n) \leqslant \varepsilon.$$

**Autre idée.** On peut aussi montrer que $(E, d_\lambda)$ est pré-compact et complet.

**Exercice 87 (Le cube de Hilbert comme compact métrique universel)**
On considère $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance produit $d_2$ (voir exercice 85). Soit $(X, \delta)$ un espace métrique compact.

1. Démontrer qu'il existe une distance $d$ sur $X$ équivalente à $\delta$ et bornée par 1.
2. Démontrer que $X$ contient une partie dénombrable dense $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On considère l'application :

$$j = \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & [0,1]^{\mathbb{N}} \\ x & \longmapsto & (d(x,a_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $j$ induit un homéomorphisme de $X$ sur $j(X)$.

1. Comme $X$ est compact, $X$ est borné : il existe $M > 0$ tel que $\delta \leqslant M$. On pose $d = \dfrac{1}{M}\delta$ qui est bien une distance sur $X$ équivalente à $\delta$.
2. Comme $(X, d)$ est compact, il est à base dénombrable : voir feuille d'exercice.
3. • Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto d(a, x_n)$ est continue de $X$ dans $[0,1]$ : selon l'exercice 85 (propriété universelle du produit), l'application $j$ est continue de $(X, d)$ dans $(C, d_2)$.

   • L'application $j$ est injective. En effet supposons que $x$ et $y$ dans $X$ vérifient $j(x) = j(y)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $d(a_n, x) = d(a_n, y)$. Ainsi les applications continues $d(., x)$ et $d(., y)$ coïncident sur une partie dense de $X$ donc sont égales, en particulier en $x$, ce qui donne $d(x, y) = 0$ donc $x = y$.

   • Comme $j$ est continue, $j(X)$ est une partie compact de $[0,1]^{\mathbb{N}}$, et alors, comme $j : X \to j(X)$ est bijective et continue, selon le théorème 38, $j$ induit un homéomorphisme de $X$ sur $J(X)$.