Cours interactif de topologie métrique

Table des matières

1 Distances et normes **2**
- 1.1 Définitions . . . 2
- 1.2 Premiers exemples . . . 2
- 1.3 Comparaison des espaces métriques . . . 3
- 1.4 Boules et Sphères . . . 4
- 1.5 Parties convexes d'un espace vectoriel . . . 4
- 1.6 Parties bornées d'un espace métrique, applications bornées . . . 4
- 1.7 Suites dans les espaces métriques et extractions . . . 4
- 1.8 Normes et distances équivalentes . . . 5

2 Topologie d'un espace métrique **6**
- 2.1 Ouverts d'un espace métrique . . . 6
- 2.2 Fermés d'un espace métrique . . . 6
- 2.3 Point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle. . . . 7
- 2.4 Voisinages . . . 7
- 2.5 Points intérieurs, frontière . . . 7
- 2.6 Parties denses d'un espace espace métrique . . . 8
- 2.7 Invariance des notions topologiques pour des distances équivalentes. 8

3 Complétude **8**
- 3.1 Généralités . . . 8
- 3.2 Propriétés importantes des espaces complets . . . 9

4 Limites et continuité des fonctions entre espaces métriques **9**
- 4.1 Limites et continuité en un point . . . 9
- 4.2 Opérations classiques sur les fonctions continues. . . . 10
- 4.3 Caractérisation globale de la continuité . . . 10
- 4.4 Compléments . . . 10
- 4.5 Applications uniformément continues . . . 10
- 4.6 Le théorème du point fixe de Picard . . . 11

5 Quelques notions importantes **11**
- 5.1 Produit fini d'espaces métriques ou d'espaces vectoriels normés . 11
- 5.2 Fonctions composantes . . . 11
- 5.3 Topologie trace, points isolés . . . 12

6 Applications linéaires continues **12**
- 6.1 Le théorème fondamental . . . 12
- 6.2 Normes d'opérateurs . . . 13

7 Compacité **13**
- 7.1 Définition séquentielle . . . 13
- 7.2 Propriétés . . . 14
- 7.3 Compacité et continuité . . . 15

8 Espaces vectoriels de dimension finie **15**
- 8.1 L'équivalence des normes . . . 15
- 8.2 Conséquences . . . 16
- 8.3 Suites convergentes dans un espace vectoriel de dimension finie . 16
- 8.4 Limite et continuité en dimension finie . . . 16
- 8.5 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales 16

9 Connexité **17**
- 9.1 Généralités . . . 17
- 9.2 Propriétés des espaces connexes . . . 18
- 9.3 Composantes connexes . . . 18
- 9.4 Connexité et applications continues . . . 19
- 9.5 Produit fini de connexes . . . 19

10 Connexité par arcs **19**
- 10.1 Généralités . . . 19
- 10.2 Propriétés des espaces connexes par arcs . . . 20
- 10.3 Composantes connexes par arcs . . . 20
- 10.4 Connexité et applications continues . . . 20
- 10.5 Connexité par arcs versus connexité . . . 20

11 Compléments **20**
11.1 Produit dénombrables d'espaces métriques 20
11.2 Produit dénombrable d'espaces métriques compacts 21

1 Distances et normes

1.1 Définitions

Définition 1 *Soit E un ensemble. Une distance sur E est une application* $\mathrm{dist} : E^2 \to \mathbb{R}^+$ *telle que pour tout $(x, y, z) \in E^3$ on ait :*

1. $\mathrm{dist}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(y, x)$;
3. $\mathrm{dist}(x, z) \leqslant \mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z)$.

Remarque 1.1

1. Lorsque (E, d) est un espace métrique, pour tout $(x, y, z) \in E^3$ on a :
$$|d(x, z) - d(z, y)| \leqslant d(x, y).$$
2. Lorsque (E, d) est un espace métrique et $A \subset E$, on notera d_A la restriction de d à A^2, et alors (A, d_A) est un espace métrique.

Définition 2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur E est une application $\| \| : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie pour tout x, y dans E et λ scalaire :*

1. $\|x\| \geqslant 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
4. ***Inégalité triangulaire*** *:* $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Remarque 1.2

1. Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \| \|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\| \|$ est une norme sur E.
2. Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. On définit une distance sur E en posant pour tout $(x, y) \in E$:
$$\mathrm{dist}(x, y) = \|y - x\| .$$
Cette distance est « invariante par translation » : pour tout $(x, y) \in E^2$ et $v \in E$ on a :
$$\mathrm{dist}(x + v, y + v) = \mathrm{dist}(x, y).$$
3. Pour les normes provenant d'un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ euclidien ou hermitien sur E, définies par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, l'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| .$$
En effet, pour x et y dans E on a :
$$\begin{aligned} \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad &\Leftrightarrow \quad \|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \, \|y\| \\ &\Leftrightarrow \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \, \|y\| \\ &\Leftrightarrow \quad \langle x, y \rangle \leqslant \|x\| \, \|y\| \end{aligned}$$

1.2 Premiers exemples

• La distance discrète sur un ensemble non vide E. Pour $(x, y) \in E$ on pose :
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Sur $\mathbb{K}^n$ on a les normes usuelles suivantes ($v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$) :
$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| , \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \|v\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| .$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\| \|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ (dans le cas de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle provient du produit scalaire hermitien canonique).

Exercice 1
Démontrer que : $\| \|_2 \leqslant \sqrt{n} \, \| \|_\infty \leqslant \sqrt{n} \, \| \|_1 \leqslant n \, \| \|_2$.

Exercice 2 (Inégalités de Hölder et Minkowsky)
Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs, p et q des réels > 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Soient x et y réels positifs. Démontrer que $xy \leqslant \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$.

2. On pose $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^p$ et $B = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^q$, sommes que l'on suppose non nulles. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on pose encore :

$$x_i = \frac{a_i}{A^{\frac{1}{p}}} \quad \text{et} \quad y_i = \frac{b_i}{B^{\frac{1}{q}}}$$

Utiliser la première question pour en déduire l'inégalité de HÖLDER :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. Pour $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose : $\|v\|_p = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$. Démontrer que $\| \ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ (l'inégalité triangulaire s'appelle l'inégalité de MINKOWSKY).

• Sur l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a les exemples de normes ($A \in E$) :

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |(A)_{i,j}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |(A)_{i,j}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} |(A)_{i,j}|.$$

Il est important de noter que la $\| \ \|_2$ provient du produit scalaire : $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$.
Noter aussi que les normes utiles sur E sont celles pour lesquelles on a $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ pour tout $(A, B) \in E^2$ (on parle de norme d'algèbre).

Exercice 3
Démontrer que $n\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_2$ sont des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Sur l'espace E des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ on a les exemples de normes ($f \in E$) :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}, \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

La norme $\| \ \|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 fg.$$

• Lorsque X est un ensemble non vide et $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$, l'application :

$$\| \ \|_\infty : f \mapsto \sup_{x\in X} |f(x)|$$

est une norme sur E.

1.3 Comparaison des espaces métriques

Définition 3 *Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, $k \in \mathbb{R}^+$ et $f : E \to F$. On dit que f est k-lipschitzienne lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$ on a :*

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y).$$

Exercice 4
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que f est lipschitzienne.

La fonction f est de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ donc à dérivée bornée. On écrit les accroissements finis...

Remarque 1.3
La composée de deux applications lipschitziennes est encore lipschitzienne.

Exercice 5
Soient (E, d) un espace métrique non vide, $a_0 \in E$ et A une partie non vide de E. On pose, pour tout x dans E :

$$\begin{cases} d_{a_0}(x) & = d(a_0, x) \\ \mathrm{dist}(x, A) & = \inf\limits_{a\in A} d(a, x) \end{cases}$$

1. Montrer que d_{a_0} est lipschitzienne.
2. Montrer que la fonction $d_A : x \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ est correctement définie et lipschitzienne.

Définition 4 *Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques. Une isométrie de (E, d) sur (F, δ) est une application $f : E \to F$ telle que pour tout $(x, y) \in E$ on ait :*

$$\delta(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Exercice 6 (Le plongement de Kuratowsky)
Soit (X, dist) un espace métrique non vide et $a_0 \in E$. Pour $a \in E$ on pose : $f_a : x \mapsto \mathrm{dist}(a, x) - \mathrm{dist}(a_0, x)$.
Démontrer que $\varphi = \begin{pmatrix} (X, d) & \longrightarrow & (\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \| \ \|_\infty) \\ a & \longmapsto & f_a \end{pmatrix}$ est un plongement isométrique.

1.4 Boules et Sphères

Définition 5 *Soient (E, dist) un espace métrique, $a \in E$ et $r > 0$.*

1. *La boule ouverte de centre a et de rayon r est :*

$$B_o(a, r) = \{x \in E \mid \text{dist}(a, x) < r\}.$$

2. *La boule fermée de centre a et de rayon r est :*

$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid \text{dist}(a, x) \leqslant r\}.$$

3. *La sphère de centre a et de rayon r est :*

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \text{dist}(a, x) = r\}.$$

Remarque 1.4
Les boules d'un espace vectoriel normé « se ressemblent toutes » :

$$B_f(a, r) = a + rB_f(0, 1).$$

Exercice 7

1. Dessiner la boules unité fermée sur $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles.
2. Tracer l'allure de la « médiatrice » du segment $[AB]$ où $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 0)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$.
3. Trouver un espace métrique (E, d) et deux boules B et B' de rayons respectifs $r < r'$ telles que $B' \subset B$ et $B' \neq B$.

1.5 Parties convexes d'un espace vectoriel

Définition 6 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une partie A de E est convexe lorsque pour tout $(m, p) \in A^2$ le segment d'extrémité m et p est encore dans A, ce qui se traduit par :*

$$(\forall \lambda \in [0, 1])\,((1 - \lambda)m + \lambda p) \in A.$$

Remarque 1.5

1. Cette notion ne dépend pas de la norme mais de la structure vectorielle (pas de sens a priori sur les espaces métriques).
2. Pour tout $a \in E$ et λ réel on a : $(1 - \lambda)a + \lambda a = a$.

Théorème 1
Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé.

1. *Les boules de E sont convexes.*
2. *Une intersection de parties convexes de E est encore convexe.*

Exercice 8
Démontrer le théorème 1.

1.6 Parties bornées d'un espace métrique, applications bornées

Définition 7 *Soit $A \subset E$ où (E, d) est un espace métrique. On dit que A est bornée dans (E, d) lorsque A est inclus dans une boule de (E, d).*

Remarque 1.6

1. Noter que la notion de partie bornée dépend du choix de la distance.
2. Lorsque $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé, $A \subset E$ est borné dans $(E, \| \|)$ lorsqu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $v \in A$ on ait : $\|v\| \leqslant R$.

Exercice 9
Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Le diamètre de A est :

$$\text{diam}(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y).$$

Démontrer que A est borné si et seulement si son diamètre est fini.

Définition 8 *Soient X un ensemble quelconque, (E, d) un espace métrique et $f : X \to E$. On dit que f est bornée lorsque $Im\, f$ est bornée dans (E, d).*

1.7 Suites dans les espaces métriques et extractions

Définition 9 *Soient (E, d) un espace métrique, (u_n) une suite dans E et $\ell \in E$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque $d(u_n, \ell) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(d(u_n, \ell) \leqslant \varepsilon)$$

Remarque 1.7
La notion de convergence de suites dépend de la distance (ce ne sera pas le cas pour les espace vectoriels normés de dimension finie).

Exercice 10
Soit (E,d) un espace métrique.

1. Démontrer qu'il y a unicité de la limite pour une suite convergente.
2. Démontrer qu'une suite convergente dans (E,d) est bornée.

Définition 10 *Soient (E,d) un espace métrique, (u_n) une suite dans E et $\lambda \in E$. On dit que λ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant N)(d(u_n,\lambda) \leqslant \varepsilon)$$

Remarque 1.8
Avec les notations de la définition 10, dire que λ est valeur d'adhérence de la suite (u_n) signifie exactement que pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ l'ensemble $A_{N,\varepsilon} = \{n \geqslant N \mid d(u_n,\lambda) \leqslant \varepsilon\}$ est non vide.

Définition 11 *Une extraction est une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Remarque 1.9

1. Soit φ est une extraction. On a alors : $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   En effet, si $\varphi(n) \geqslant n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors :

   $$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$$

   donc (comme $n \in \mathbb{N}$) il vient $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. Comme $\varphi(0) \geqslant 0$, on peut conclure par récurrence.

2. Soient (E,d) un espace métrique, (u_n) une suite dans E et $\lambda \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

   (i) λ est valeur d'adhérence de la suite (u_n).
   (ii) Il existe φ extraction telle que $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

   • Supposons (i). Soit $p \in \mathbb{N}$. Avec $\varepsilon = 2^p$ pour $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_{N,p} = \{n \geqslant N \mid d(u_n,\lambda) \leqslant 2^{-p}\}$ est non vide.
   On définit alors correctement par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant :

   $$\begin{cases} \varphi(0) & = \min A_{0,p} \\ \varphi(p+1) & = \min A_{\varphi(p),p+1} = \min\left\{k \geqslant \varphi(p)+1 \mid d(u_k,\lambda) \leqslant 2^{-p+1}\right\} \end{cases}$$

   Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a alors : $d(u_{\varphi(p)},\lambda) \leqslant 2^{-p}$. Par sandwich : $d(u_{\varphi(p)},\lambda) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   • Supposons (ii). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $d(u_{\varphi(n)},\lambda) \leqslant \varepsilon$.
   Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $n = \max(\varphi(N),\varphi(n_0)) \geqslant \varphi(N) \geqslant N$ et on a $d(u_n,\lambda) \leqslant \varepsilon$.

Théorème 2
Soit une suite (u_n) convergente vers ℓ dans un espace métrique (E,d). Alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.

Exercice 11
Démontrer le théorème 2.

Remarque 1.10
Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans un espace vectoriel normé $(E,\|\ \|)$ qui convergent respectivement vers $u \in E$ et $v \in E$. Alors, pour tout α et β dans $\mathbb{K}$, la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge vers $\alpha u + \beta v$.

Exercice 12
On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $P \in E$. Trouver une norme sur E telle que ;

$$X^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P.$$

1.8 Normes et distances équivalentes

Définition 12 *Soient $\|\ \|$ et N des normes sur un espace vectoriel E. On dit que la norme $\|\ \|$ est équivalente à la norme N lorsqu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :*

$$\alpha N \leqslant \|\ \| \leqslant \beta N,$$

i.e. pour tout v dans E : $\alpha N(v) \leqslant \|v\| \leqslant \beta N(v)$.

Remarque 1.11

1. Lorsque $\|\ \|$ et N sont deux normes équivalentes sur E alors elles ont les même bornés et les même suites convergentes.
2. Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on peut penser à chercher une suite dans E qui converge pour une des normes et qui ne converge pas pour l'autre norme.

3. On dit aussi que deux distances d_1 et d_2 sur un ensemble E sont équivalentes lorsqu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\alpha d_1 \leqslant d_2 \leqslant \beta d_1.$$

Exercice 13
Sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ montrer que les normes $\| \ \|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f|$ et $\| \ \|_\infty : f \mapsto \max_{x\in[0,1]} |f(t)|$ ne sont pas équivalentes.

2 Topologie d'un espace métrique

2.1 Ouverts d'un espace métrique

Définition 13 *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de E est un ouvert de (E, d) lorsque pour tout $a \in \mathcal{O}$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(a, \varepsilon)$ soit incluse dans $\mathcal{O}$.*
On notera $\mathcal{T}_E$ ou $\mathcal{T}_d$ l'ensemble des ouverts de (E, d) : c'est la topologie de (E, d).

Remarque 2.1

1. **Une mention spéciale sur le vocabulaire** : la notion d'ouvert est relative à l'espace métrique (E, d) ; on parle d'ouvert de (E, d) (ou de E) (et non d'ouvert tout court).
2. Il s'agit d'une notion permettant de traduire les propriétés « stables par petite perturbation ».
3. E et $\emptyset$ sont des ouverts de E.
4. Les intervalles ouverts de $(\mathbb{R}, |\ |)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Théorème 3
Soit (E, d) un espace métrique.

1. *Les boules ouvertes de E sont des ouverts de E.*
2. *Une intersection **finie** d'ouverts de E est un ouvert de E.*
3. *Une union quelconque d'ouverts de E est encore un ouvert de E.*

Exercice 14
Démontrer le théorème 3

Remarque 2.2
Le point 2 du théorème 3 n'est pas vrai en général pour une intersection dénombrable : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-2^{-n}, 2^{-n}[= \{0\}$.

Exercice 15
Soit (E, d) un espace métrique.

1. Si d est la distance discrète sur E, démontrer que $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(E)$.
2. Démontrer que tout ouvert non vide de E est réunion de boules ouvertes de E : on dit que l'ensemble des boules ouvertes de (E, d) est une base de la topologie $\mathcal{T}_d$.

2.2 Fermés d'un espace métrique

Définition 14 *Soit (E, d) un espace métrique. On dit que $F \subset E$ est fermé dans E lorsque son complémentaire F^c est un ouvert de E.*

Théorème 4
Soit (E, d) un espace métrique.

1. *Les boules fermées, les sphères de E sont des fermés de E.*
2. *Une union **finie** de fermés de E est un fermé de E.*
3. *Une intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E.*

Exercice 16
Démontrer le théorème 4.

Remarque 2.3
E et $\emptyset$ sont des fermés (et des ouverts) de E. Les singletons sont des fermés de E. Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$, i.e. les intervalles de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Théorème 5 (Caractérisation séquentielle des fermés)
Soit (E, d) un espace métrique. Soit $F \subset E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *F est fermé dans E.*
(2) *Pour tout suite (x_n) dans F qui converge vers $\ell \in E$, on a $\ell \in F$.*

Exercice 17
Démontrer le théorème 5.

2.3 Point adhérent à une partie. Caractérisation séquentielle.

Définition 15 *Soit (E,d) un espace métrique. Soit $A \subset E$, non vide. On dit que $x \in E$ est adhérent à A lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*
Autrement dit, x est adhérent à A lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ (qui dépend de ε) tel que $d(x,a) \leqslant \varepsilon$.
On note $\overline{A}$ l'ensemble des points de E adhérents à A : c'est l'adhérence de A dans E.

Exercice 18
Soient (E,d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Démontrer que pour tout x dans E, $x \in \overline{A}$ si et seulement si $\text{dist}(x,A) = 0$.

Soit $x \in E$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists a_\varepsilon \in A)(d(a_\varepsilon, x) \leqslant \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \text{dist}(x,A) = 0 \end{aligned}$$

Théorème 6 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)
Soit (E,d) un espace métrique. un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$, non vide. Pour $x \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $x \in \overline{A}$
(2) *Il existe une suite (a_n) dans A telle que $a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$.*

Exercice 19
Démontrer le théorème 6

Corollaire 6.1
Soit A une partie d'un espace métrique (E,d). Alors A est fermé dans E si et seulement si $\overline{A} = A$.

Exercice 20
Démontrer le corollaire 6.1.

Théorème 7
Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E qui contient A.

Exercice 21
Démontrer le théorème 7.

Exercice 22
Soient (E,d) un espace métrique et (u_n) une suite dans E. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est un fermé de E.

2.4 Voisinages

Définition 16 *Soit (E,d) un espace métrique et $a \in E$. Une partie V est appelée voisinage de a dans E lorsqu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de E tel que : $a \in \mathcal{O} \subset V$.*
On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans E

Théorème 8
Soit $a \in E$ où (E,d) est un espace métrique.
1. *$E \in \mathcal{V}(a)$.*
2. *Soit $V \in \mathcal{V}(a)$. Si W est une partie de E qui contient V alors $W \in \mathcal{V}(a)$.*
3. *$\mathcal{V}(a)$ est stable par intersection finie.*

2.5 Points intérieurs, frontière

Définition 17 *Soient (E,d) un espace métrique et $a \in A \subset E$. On dit que a est intérieur à A lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$.*
On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A : c'est l'intérieur de A

Théorème 9
Soient A et B deux parties d'un espace métrique (E,d) on a :
1. *$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
2. *$\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$ et $\overset{\circ}{\overline{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}$.*

Théorème 10
Avec les notations de la définition 17 :
1. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A ;*
2. *A est un ouvert de (E,d) si et seulement si $A = \mathring{A}$.*

Exercice 23
Démontrer le théorème 10.

Définition 18 *Soient (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. La frontière de A est $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

Théorème 11
Soient $(E, \| \ \|$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. Alors :

$$\overline{B_o(a,r)} = B_f(a,r),\ \overset{\circ}{\overline{B_f(a,r)}} = B_o(a,r),\ \partial B_o(a,r) = \partial B_f(a,r) = S(a,r).$$

Exercice 24
Trouver un espace métrique mettant en défaut les égalités du théorème 11

Exercice 25
Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide. Que dire ?

2.6 Parties denses d'un espace espace métrique

Définition 19 *Soit (E,d) un espace métrique. On dit que $A \subset E$ est dense dans E lorsque $\overline{A} = E$.*

Remarque 2.4
Avec les notations de la définition 19, A est un ouvert dense de E si et seulement si son complémentaire est un fermé sans intérieur de E.

Théorème 12
Soient (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Les propriétés suivantes sont équivalents.

- (i) *A est dense dans E.*
- (ii) *Tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.*
- (iii) *A rencontre toute boule ouverte de E de rayon $r > 0$.*
- (iv) *A rencontre tout ouvert non vide de E.*

2.7 Invariance des notions topologiques pour des distances équivalentes.

Théorème 13
Soient E un ensemble, d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur E.

1. *(E,d_1) et (E,d_2) ont les même suites convergentes et les limites pour d_1 et d_2 sont les mêmes.*
2. *Les fermés, les ouverts, les parties bornées, les intérieurs, les frontières, les adhérences de (E,d_1) et de (E,d_2) coïncident.*
3. *Les notions d'applications continues et uniformément continues, de limites de fonction coïncident pour (E,d_1) et de (E,d_2) (voir le paragraphe correspondant plus bas).*
4. *(E,d_1) et (E,d_2) ont les mêmes suites de Cauchy, même parties compactes, même parties complètes.*

3 Complétude

3.1 Généralités

Définition 20 *Une suite (u_n) dans un espace métrique (E,d) est dite de Cauchy lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall p \geqslant N)\,(\forall q \geqslant N)\,(d(u_n,u_q) \leqslant \varepsilon)$$

Théorème 14
Soit (u_n) une suite dans un espace métrique (E,d).

1. *Démontrer que si la suite (u_n) est de Cauchy alors elle est bornée.*
2. *Démontrer que si la suite (u_n) converge alors elle est de Cauchy.*
3. *Démontrer que si la suite (u_n) est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence ℓ alors elle converge vers ℓ.*
   En particulier, une suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence.
4. *On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $\Omega_n = \{u_k \mid k \geqslant n\}$. Démontrer que la suite (u_n) est de Cauchy si et seulement si $\operatorname{diam}(\Omega_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Exercice 26
Démontrer le théorème 14.

Définition 21
1. *Un espace métrique (E,d) est dit complet lorsque toute suite de Cauchy dans E est convergente.*
2. *Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Remarque 3.1
1. Par construction $(\mathbb{R}, |\ |)$ est complet.
2. En conséquence immédiate $(\mathbb{C}, |\ |)$ est complet.

Théorème 15
Soit X un ensemble non vide. Alors l'ensemble $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ des fonctions bornées de X dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de $\|\ \|_\infty$, est un espace de Banach.

Exercice 27
Démontrer le théorème 15

Remarque 3.2
Notons que $\mathbb{K}^n=\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ avec $X=\{1,\dots,n\}$ et ainsi $(\mathbb{K}^n,\|\ \|_\infty)$ est complet.

Exercice 28
Démontrer que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\ \|_2$ est un espace de Banach.

3.2 Propriétés importantes des espaces complets

Théorème 16
Soit (E,d) un espace métrique complet et $F\subset E$. Alors F muni de la distance induite est complet si et seulement si F est fermé dans E.

Exercice 29
Démontrer le théorème 16.

Théorème 17
Dans un espace de Banach, l'absolue convergence d'une série implique sa convergence.

Exercice 30
Démontrer le théorème 17.

Exercice 31

1. **Lemme de Baire**. Soient (E,d) un espace métrique complet et (F_n) une suite décroissante de fermés non vide de E telle que $\operatorname{diam}(F_n)\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n$ est un singleton.
2. Donner un exemple d'espace métrique et de suite décroissante (F_n) de fermés non vides de E telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\emptyset$ et $\operatorname{diam}(F_n)\not\to 0$.

Exercice 32
Soit (E,d) un espace métrique. Démontrer que « toute suite de Cauchy de E converge quelque part ».

4 Limites et continuité des fonctions entre espaces métriques

4.1 Limites et continuité en un point

Définition 22 *Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, $a\in\overline{A}$ où A est une partie non vide de E, $f:A\to F$ et $\ell\in F$.*

1. *On dit que f admet ℓ pour limite en a et on écrit $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell$, lorsque :*
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in A)(d(x,a)\leqslant\alpha\Rightarrow\delta(f(x)-\ell)\leqslant\varepsilon).$$
2. *Lorsque $a\in A$, on dit que f est continue en a si $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}f(a)$.*
3. *On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A. On note $C^0(A,F)$ l'ensemble des applications continues de A dans F.*

Remarque 4.1

1. Il y a unicité de la limite lorsqu'elle existe.
2. Une fonction qui a une limite en a est bornée au voisinage de a : il existe $r>0$ tel que f soit bornée sur $A\cap B(a,r)$.
3. Les notions de limite en un point et de continuité en un point sont locales : par exemple, avec les notations de la définition, f est continue en a si et seulement si il existe $V\in\mathcal{V}(a)$ tel que $f\mid_V$ est continue en a.
4. La norme d'un espace vectoriel normé est continue, les applications coordonnées de $\mathbb{R}^n$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$ (muni de $\|\ \|_2$ pour l'instant).

Théorème 18 (Caractérisation séquentielle de la limite et de la continuité)
Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, A une partie non vide de E, $f:A\to F$.

1. *Lorsque $a\in\overline{A}$ et $\ell\in F$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   (i) $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell$.
   (ii) *Pour toute suite (x_n) dans A telle que $x_n\underset{+\infty}{\longrightarrow}a$ on a $f(x_n)\underset{+\infty}{\longrightarrow}\ell$.*
2. *Lorsque $a\in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   (i) *f est continue en a.*
   (ii) *Pour toute suite (x_n) dans A telle que $x_n\underset{+\infty}{\longrightarrow}a$ on a $f(x_n)\underset{+\infty}{\longrightarrow}f(a)$.*

Théorème 19
Toute fonction lipschitzienne entre espace métrique est continue

4.2 Opérations classiques sur les fonctions continues.

Théorème 20
Soient (E,d) un espace métrique, $(F,\|\ \|_F)$ un espace vectoriel normés.

1. *Toute combinaison linéaires de fonctions continues sur A est continue sur A : $C^0(A,F)$ est un sous-espaces vectoriel de F^A.*
2. *Le produit de deux fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$ est encore une fonction continue sur A.*
3. *Sous réserve d'existence, le quotient de deux fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur A.*
4. ***Composition.** Si f est continue, si B est une partie de F contenant $f(A)$ si $g : B \to G$ est continue où G est un espace vectoriel normé, alors $g \circ f$ est continue.*

Remarque 4.2
En particulier les fonctions polynomiales et les quotients de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ (lorsque...) sont continues.

4.3 Caractérisation globale de la continuité

Théorème 21
Soient (E,d),(F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) *f est continue (sur E).*
(ii) *Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de F, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de E.*
(iii) *Pour tout fermé $\mathcal{F}$ de F, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{F})$ est un fermé de E.*

Remarque 4.3
Ce théorème est très utile pour démontrer que certaines parties sont des ouverts ou des fermés d'un espace métrique.

Exercice 33
Démontrer le théorème 21.

Exercice 34
Justifier que $]0,1[^n$ est un ouvert de $(\mathbb{R}^2,\|\ \|_2)$. .

Exercice 35
Soit (E,d) un espace métrique (non vide).

1. Soit F un fermé non vide de E. Montrer que $x \in E \setminus F$ si et seulement si $\mathrm{dist}(x,F) > 0$.
2. Démontrer que tout ouvert de E est une union dénombrable de fermés de E.

4.4 Compléments

Théorème 22 (Prolongement des identités)
Soient (E,d),(F,δ) deux espaces métriques. Si deux fonctions continues $f : E \to F$ et $g : E \to F$ coïncident sur une partie dense de E alors elles sont égales.

Exercice 36
Démontrer le théorème 22.

Définition 23 *Soient (E,d),(F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$. On dit que f est un homéomorphisme lorsque :*

1. *f est bijective ;*
2. *f est f^{-1} sont continues.*

Remarque 4.4
Un homéomorphisme entre deux espaces métriques E et F est une application ouverte : elle transforme un ouvert de E en un ouvert de F.

En effet, soit $\mathcal{O}$ un ouvert de E. Comme f^{-1} est continue, $\underbrace{(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O})}_{=f(\mathcal{O})}$ est un ouvert de F.

4.5 Applications uniformément continues

Définition 24 *Soient (E,d),(F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$. On dit que f est uniformément continue lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall (x,y) \in E^2)(d(x,y) \leqslant \alpha \Rightarrow \delta(f(x),f(y)) \leqslant \varepsilon).$$

Théorème 23 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)
Soient (E,d),(F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) *f est uniformément continue.*
(ii) *Dès que (u_n) et (v_n) sont des suites dans E telles que $d(u_n,v_n) \xrightarrow[+\infty]{} 0$ on a : $\delta\big(f(u_n),f(v_n)\big) \xrightarrow[+\infty]{} 0$.*

Exercice 37
Démontrer le théorème 23.

Exercice 38
Démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

4.6 Le théorème du point fixe de Picard

Théorème 24 (Le théorème du point fixe de Picard)
Soient (E, dist) un espace métrique complet et $f : E \to E$. On suppose que f est une contraction stricte i.e. il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$ on ait $\text{dist}(f(x), f(y) \leqslant k\,\text{dist}(x, y)$.
Pour tout $u_0 \in E$ on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors f admet un unique point fixe ℓ, et que pour tout $x \in E$ la suite des itérés $(f^n(x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ avec :

$$\text{dist}(f^n(x), \ell) \leqslant \frac{k^n}{1-k}\text{dist}(f(x), x).$$

Exercice 39
Démontrer le théorème 24.

Corollaire 24.1
Soient (E, dist) un espace métrique complet et $f : E \to E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que f^p soit une contraction stricte. Démontrer que f admet un unique point fixe ℓ.

Exercice 40
Démontrer le corollaire 24.1.

5 Quelques notions importantes

5.1 Produit fini d'espaces métriques ou d'espaces vectoriels normés

Exercice 41
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \{1, \dots, n\}$, (E_k, d_k) des espaces métriques. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ on pose :

$$d_\infty(x, y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} d_k(x_k, y_k).$$

1. Démontrer que d_∞ est une distance sur E : c'est la distance produit.
2. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on considère la fonction (projection sur le facteur E_k) :
$$p_k = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E_k \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_k \end{pmatrix}$$
   a) Démontrer que chaque p_k est continue.
   b) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Démontrer que p_k est « ouverte » i.e. transforme un ouvert de E en un ouvert de E_k.
   c) Les projections sont-elles « fermées » ?
   d) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on considère un ouvert $\mathcal{O}_k$ de E_k. Démontrer que $\mathcal{O} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$ est un ouvert de E.
   La réciproque est-elle vraie ?

Remarque 5.1
On définit de la même manière une notion d'espace vectoriel normé produit...

5.2 Fonctions composantes

Définition 25 *Soient (E, d) un espace métrique, $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \{1, \dots, p\}$, (F_k, d_k) des espaces métriques. On note $F = \prod_{i=1}^{p} F_i$ que l'on munit de la distance d_∞. Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$. Pour tout x dans E on peut écrire $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$.*
Ces fonctions $f_k : E \to F_k$ s'appellent les fonctions composantes de f.

Remarque 5.2
Penser au cas particulier $F_k = \mathbb{R}$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$.

Théorème 25
On reprend les notations de la définition 25 et on considère $a \in \overline{A}$.

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   (1) $\lim_a f = \ell$.
   (2) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, la fonction $f_k : E \to F_k$ admet pour limite ℓ_k en a.
2. *Lorsque $a \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   (1) f est continue en a.
   (2) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, la fonction f_k est continue en a.

5.3 Topologie trace, points isolés

On considère ici une partie non vide A d'un espace métrique (E,d). Alors (A,d_A), où d_A est la restriction de d à A^2, est un espace métrique. Mais il faut avoir à l'esprit que beaucoup de choses peuvent avoir changées, puisque, pour $a\in A$ et $r>0$, on a :

$$B_{d_A}(a,r)=B_d(a,r)\cap A.$$

Théorème 26
Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E,d).

1. *Les ouverts de (A,d_A) sont exactement les traces sur A des ouverts de (E,d) c'est à dire les parties de A de la forme $\mathcal{O}\cap A$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de E.*
2. *Les fermés de (A,d_A) sont exactement les traces sur A des fermés de (E,d) c'est à dire les parties de A de la forme $F\cap A$ où F est un fermé de E.*

Exercice 42
Démontrer le théorème 26.

Exercice 43
$[0,1[$ est-il fermé ? ouvert ?

Définition 26 *Soient (E,d) un espace métrique et $A\subset E$.*

1. *Si $a\in A$, on dit que a est un point isolé de A lorsque $\{a\}$ est un ouvert de A.*
2. *On dit que A est discrète lorsque tous ses points sont isolés.*

Remarque 5.3
Avec les notations ci-dessus, lorsque A est discrète, $\mathcal{T}_A=\mathcal{P}(A)$: c'est la même topologie que celle induite par la distance discrète δ sur A.

Exercice 44
Démontrer que toute partie discrète de $(\mathbb{R},|\ |)$ est dénombrable. Y-a-t-il réciproque ?

6 Applications linéaires continues

6.1 Le théorème fondamental

Théorème 27
Soient E et F des espaces vectoriels normés avec $E\neq\{0\}$ et $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) f est continue.
(2) f est lipschitzienne.
(3) f est uniformément continue.
(4) Il existe $x_0\in E$ tel que f est continue en x_0.
(5) f est continue en 0.
(6) Il existe une boule de rayon $\varepsilon>0$ où f est bornée.
(7) f est bornée sur la boule unité fermée de E
(8) $(\exists M\geqslant 0)(\forall x\in E)(\|f(x)\|_F\leqslant M\|x\|_E)$.
(9) f transforme les bornés de E en bornés de F.

Exercice 45
Démontrer le théorème 27.

Exercice 46
On pose $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $P\in E$, il existe une suite (a_n) presque nulle telle que $P=\sum_{n\geqslant 0}a_nX^n$ et on pose $\|P\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$.
Démontrer que $D:P\mapsto P'$ n'est pas continue.

Exercice 47
Avec les notations du théorème 27, démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f n'est pas continue.
(ii) Il existe une suite (x_n) dans E telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\|f(x_n)\|_F=1$ et $x_n\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$.
(iii) Il existe une suite (y_n) dans la sphère unité de E telle que $\|f(y_n)\|_F\underset{+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

6.2 Normes d'opérateurs

Définition 27 *Soient E et F des espaces vectoriels normés avec $E \neq \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, espace des applications linéaires continues de E dans F, on note :*

$$|||f||| = \sup_{x \in S_E} \|f(x)\|_F .$$

Remarque 6.1
Noter que si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, selon le point 8 du théorème 27, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$.
Ainsi, pour tout $x \in S_E = \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\}$, $\|f(x)\|_F \leqslant M$, donc $\{\|f(x)\|_F \mid x \in S_E\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, ce qui assure que $|||f|||$ est correctement définie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 48
Soit $\alpha > 0$. Démontrer que :

$$|||f||| = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\}\right\} = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in \overline{B}(0,\alpha) \setminus \{0\}\right\},$$

où $\overline{B}(0,\alpha)$ désigne la boule fermée de centre 0_E et de rayon α.

Remarque 6.2
Avec les notations ci-dessus, pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ on a, d'après l'exercice 48, pour tout $x \in E$:

$$\|f(x)\|_F \leqslant |||f||| \, \|x\|_E .$$

De plus $|||f|||$ est le plus petit réel M tel que pour tout $x \in E$: $\|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$.

Théorème 28
Avec les notation de la définition 27, si de plus G est un espace vectoriel normé et si $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et :

$$|||g \circ f||| \leqslant |||g||| \, |||f||| .$$

Exercice 49
Démontrer le théorème 28

Exercice 50
On considère $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et pour f dans E on pose :

$$F_f = \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f \end{pmatrix}.$$

Soit $\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & F_f \end{pmatrix}$.

1. On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$. Démontrer que φ est continue et trouver $|||\varphi|||$.
2. On munit E de la norme $\| \ \|_1$. Démontrer que φ est continue et et trouver $|||\varphi|||$.

Exercice 51
On considère $E = \mathbb{C}^n$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est considérée comme un endomorphisme de E.

1. Dans le cas où E est muni de $\| \ \|_\infty$, démontrer que $A \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $|||A|||$.
2. Dans le cas où E est muni de $\| \ \|_1$, démontrer que $A \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $|||A|||$.

7 Compacité

7.1 Définition séquentielle

Définition 28 *Un espace métrique (E,d) est dit compact lorsque toute suite dans E admet une valeur d'adhérence.*

Remarque 7.1

1. La compacité est une notion intrinsèque : elle ne dépend pas de l'espace ambiant. Si K est un compact de E et $E \subset E'$ alors K est un compact de E'.
2. Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact.

   On démontre ce point. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite dans $[a,b]$.

   • On va construire par récurrence une suite $[a_n, b_n]$ de segments de $[a,b]$ telle l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n, b_n]\}$ soit infini.

   On suppose pour un certain n que $[a_n, b_n]$ est construit. Au moins l'un des deux intervalles $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ et $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ possède la même propriété : on a ainsi construit $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

On prend $a_0 = a$ et $b_0 = b$ pour initialiser.
Les suite (a_n) et $b_n)$ sont adjacentes : elles convergent vers la même limite $\ell \in [a, b]$.

• On va construire par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On pose $\varphi(0) = 0$. Supposons que $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ sont construits. On pose alors :

$$\varphi(n+1) = \min \underbrace{\{k > \varphi(n) \mid u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}}_{\text{partie non vide de } \mathbb{N}}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$: par sandwich, $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 52
Démontrer qu'une partie compacte et discrète d'un espace métrique (E, d) est finie.

7.2 Propriétés

Théorème 29
Une suite dans un compact qui admet une seule valeur d'adhérence est convergente.

Exercice 53
Démontrer le théorème 29.

Théorème 30
Tout espace métrique compact est complet.

Exercice 54
Démontrer le théorème 30.

Théorème 31
Soit K un compact d'un espace métrique (E, d). Alors K est fermé et borné dans (E, d).

Exercice 55
Démontrer le théorème 31.

Exercice 56
On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$.

1. Justifier que E est de dimension infinie.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $\varphi_n : x \mapsto \mathrm{e}^{i2n\pi x}$.
   a) Montrer que (φ_n) est une suite la sphère unité de E.
   b) Démontrer que pour tout $p \neq q$ dans $\mathbb{N}$ on a : $\|\varphi_p - \varphi_q\|_2 = \sqrt{2}$.
   c) Démontrer que (φ_n) n'admet pas de sous-suite convergente.
3. La réciproque du théorème 31 est-elle vraie ?

Exercice 57
Démontrer que $SL_2(\mathbb{R})$ n'est pas compact dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de $\| \ \|_2$.

Théorème 32
Soient (E, d) un espace métrique compact et $A \subset E$. Alors (A, d_A) est compact si et seulement si A est fermé dans E.

Démonstration.
• Si A est compact, A est fermé dans E d'après le théorème 31.

• Supposons que A soit fermé dans E. Soit (x_n) une suite dans A. Comme E est compact il existe une extraction φ telle que $x_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$ et on a donc $\ell \in \overline{A} = A$. Ainsi toute suite dans A admet une valeur d'adhérence dans A. □

Exercice 58
Soient (E, d) un espace métrique et $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compacte de E.

1. Démontrer que $\mathcal{K}$ est stable par union finie.
2. Démontrer que $\mathcal{K}$ est stable par intersection quelconque non vide.

Théorème 33
Un produit fini de compact est compact.

Démonstration. • Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espace métriques compacts. On montre que l'espace produit $E = E_1 \times E_2$ est compact pour la distance produit d_∞.
Soit (u_n) une suite dans E. Pour $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire $u_n = (x_n, y_n)$ où $x_n \in E_1$ et $y_n \in E_2$. Par compacité de E_1, il existe α extraction telle que $x_{\alpha(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E_1$. Puis posons pour $n \in \mathbb{N}$: $z_n = y_{\alpha(n)}$. Par compacité de E_2, il existe β extraction telle que

$$\underbrace{z_{\beta(n)}}_{=y_{\alpha\circ\beta(n)}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in E_2.$$

Il en résulte que $u_{\alpha\circ\beta(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} (\ell, \lambda)$ puisque :

$$d_\infty(u_{\alpha\circ\beta(n)}, (\ell, \lambda)) \leqslant d_1(x_{\alpha\circ\beta(n)}, \ell) + d_2(y_{\alpha\circ\beta(n)}, \lambda) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• On généralise à tout produit fini par récurrence. □

Corollaire 33.1
Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sont exactement les parties fermées et bornées de $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_\infty)$.

Démonstration. Soit A une partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$. On peut donc inclure A dans un pavé K (produit de segments de $\mathbb{R}$) qui est un compact d'après le théorème 33. Comme A est fermé dans K, il est compact d'après le théorème 32. □

Théorème 34
Une suite décroissante de compacts non vides a une intersection non vide.

Exercice 59
Démontrer le théorème 34.

7.3 Compacité et continuité

Théorème 35
L'image continue d'un compact est un compact.

Exercice 60
Démontrer le théorème 35.

Théorème 36
Soient K un compact non vide et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 61
Démontrer le théorème 36.

Théorème 37 (Heine)
Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Exercice 62
Démontrer le théorème 37.

Théorème 38 (Théorème de Poincaré)
Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques avec E compact et $f : E \to F$ continue et injective. Alors f induit un homéomorphisme de E sur $f(E)$.

Exercice 63
Démontrer le théorème 38.

8 Espaces vectoriels de dimension finie

8.1 L'équivalence des normes

Théorème 39
Sur un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 64
1. Démontrer que sur $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes à $\| \ \|_\infty$.
   On pourra utiliser les théorèmes 33.1 et 36.
2. En déduire une démonstration du théorème 39.

8.2 Conséquences

Corollaire 39.1
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. *E est complet.*
2. *Les compacts de E sont exactement les parties fermés bornées de E.*
3. *Toute suite bornée dans E admet une valeur d'adhérence.*
4. *Toute suite bornée de E qui admet une seule valeur d'adhérence converge.*

Exercice 65
Démontrer le corollaire 39.1.

Théorème 40
Soient $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors F est fermé dans E.

Exercice 66
Démontrer le théorème 40.

Exercice 67
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\exp(M)$ est un polynôme en M.

8.3 Suites convergentes dans un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 41
Soit $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base d'un espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ de dimension finie et (u_n) une suite dans E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on écrit $u_n = \sum_{k=1}^{p} x_k(n) e_k$. Pour $\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) La suite (u_n) converge vers ℓ dans $(E, \| \|)$.
(2) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, la suite $(x_k(n))$ converge vers ℓ_k dans $\mathbb{K}$.

8.4 Limite et continuité en dimension finie

Soient $(E, \| \|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \| \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$, $f : A \to F$. Lorsque $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F, pour tout x dans E on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i,$$

où $f_i(x)$ est la i-ième coordonnées de $f(x)$ dans β. Cela définit des applications $f_i : E \to \mathbb{K}$ appelés les composantes de f dans β, et on écrit :

$$f = (f_1, \dots, f_p).$$

Théorème 42
Soient $(E, \| \|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \| \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$. Soient $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F « dans laquelle on écrit » on écrit $f = (f_1, \dots, f_p)$.

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   (1) $\lim_a f = \ell$.
   (2) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, la fonction $f_k : E \to \mathbb{K}$ admet pour limite ℓ_k en a.
2. *Lorsque $a \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   (1) f est continue en a.
   (2) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, la fonction f_k est continue en a.

8.5 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

Théorème 43
Soient $(E, \| \|_E)$ un espace vectoriel normé ***de dimension finie****, $(F, \| \|_F)$ un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est continue.*

Démonstration. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour x dans E écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ dans la base β, on pose : $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.

On a ainsi définie une norme sur E. On a alors, pour tout $x \in E$, écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$:

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) \right\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \underbrace{\|f(e_i)\|_F}_{\leqslant M},$$

où $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f(e_i)\|_F$.

Ainsi $\|f(x)\|_F \leqslant M \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant M N_1(x)$: l'application f est M-lipschitzienne donc continue de (E, N_1) dans $(F, \| \ \|_F)$.
Enfin $\| \ \|$ est équivalente à N_1 : il existe donc $B > 0$ tel que $N_1 \leqslant B \| \ \|_E$ donc f est également lipschitzienne (donc continue) de $(E, \| \ \|_E)$ dans $(F, \| \ \|_F)$ □

Définition 29 *Soient $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels. Une application $f : E_1 \times \ldots \times E_p$ est dite p-linéaire lorsque pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1, \ldots, E_p$ l'application :*

$$f_i : x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

est linéaire de E_i dans F.

Théorème 44
Avec les notations de la définition 29, lorsque les E_i sont tous de dimension finie, les application p-linéaires sont continues.

Remarque 8.1
Le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est continue.

Exercice 68
1. Justifier la phrase suivante : « localement le rang ne peut qu'augmenter ».
2. a) Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) En déduire que si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

9 Connexité

Notation. Dans toute cette partie, lorsque A et B sont deux parties d'un ensemble X, on écrira $E = A \sqcup B$ lorsque $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

9.1 Généralités

Définition 30 *Un espace métrique (E, d) est dit connexe si les seuls ouverts-fermés de E sont $\emptyset$ et E.*

Théorème 45
Soit (E, d) un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) *(E, d) est connexe*
(ii) *Il n'existe pas de partition stricte de E en deux ouverts ou en deux fermés de E i.e. si A et B sont deux parties de E avec $A \sqcup B = E$ et A et B ouverts (ou fermés) dans E alors $A = \emptyset$ ou $A = E$.*

Exercice 69
Démontrer le théorème 45.

Remarque 9.1
La connexité sert à prouver des propriétés universelles. Plus précisément, si (E, d) est un espace métrique connexe et si $\mathcal{P}(x)$ est une propriété qui dépend de x dans E, pour montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout x dans E, on considère l'ensemble $A = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\}$ et on montre successivement que $A \neq \emptyset$, A est ouvert dans E puis A est fermé dans E, ce qui démontre que $A = E$.

Exercice 70
1. Décrire explicitement tous les espaces métriques discrets connexes.
2. $\mathbb{Q}$ muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$ est-il connexe ?

Remarque 9.2
1. $\emptyset$, un singleton sont des espaces connexes.
2. $\mathbb{R}*$ est disconnexe puisque $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \sqcup \mathbb{R}_-^*$ et R_+^* et $\mathbb{R}_-^*$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^*$ par trace.

Théorème 46
$\mathbb{R}$ *est connexe.*

Exercice 71
Démontrer le théorème 46.

Définition 31 *Soient (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. On dit que A est un sous-espace connexe lorsque (A, d_A) est un espace métrique connexe.*

Exercice 72
Démontrer que si A est une partie connexe de $\mathbb{R}$ alors A est un intervalle.

9.2 Propriétés des espaces connexes

Théorème 47
Soient (E,d) un espace métrique, $A \subset B \subset \overline{A} \subset E$. On suppose que A est connexe. Alors B est connexe et en particulier $\overline{A}$ est connexe.

Démonstration. Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ des ouverts de B tels que :

$$B = \mathcal{O}_1 \sqcup \mathcal{O}_2.$$

On pose $U_1 = \mathcal{O}_1 \cap A$ et $U_2 = \mathcal{O}_2 \cap A$, qui sont tous les deux des ouverts de A par trace.
De plus on a $A = U_1 \sqcup U_2$. Par connexité de A, il vient (quitte à changer les indices) $U_1 = \emptyset$ et $U_2 = A$. Ainsi :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_1 \cap A = \emptyset \\ A \subset \mathcal{O}_2 \end{cases}$$

Supposons un instant que $\mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Il existe alors $x \in \mathcal{O}_1 \subset B \subset \overline{A}$. Comme $\overline{A} \cap B = B$, x est adhérent à A dans B donc A rencontre tout voisinage de x et ainsi $\mathcal{O}_1 \cap A \neq \emptyset$ ce qui est absurde.
En définitif on a $\mathcal{O}_1 = \emptyset$ et $\mathcal{O}_2 = B$: B est connexe selon le théorème 45. □

Théorème 48
Soient (E,d) un espace métrique, $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces connexes de E telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.
Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Démonstration. Notons $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ des ouverts de A tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 &= A \\ \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 &= \emptyset \end{cases}$$

Pour tout $i \in I$, on a l'alternative suivante :

— ou bien $A_i \subset \mathcal{O}_1$;
— ou bien $A_i \subset \mathcal{O}_2$.

En effet $A_i \cap \mathcal{O}_1$ et $A_i \cap \mathcal{O}_2$ sont des ouverts disjoints de A_i et on a :

$$A_i = (A_i \cap \mathcal{O}_1) \sqcup (A_i \cap \mathcal{O}_2),$$

ce qui amène par connexité de A_1 soit $A_i \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ soit $A_i \cap \mathcal{O}_1 = A_i$.
Prenons maintenant x dans $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A = \mathcal{O}_1 \sqcup \mathcal{O}_2$. Quitte à changer les indices, on a $x \in \mathcal{O}_1$. Ainsi, **pour tout** $i \in I$ on a $A_i \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$, ce qui force, avec l'alternative précédente, $A_i \subset \mathcal{O}_1$.
Il vient donc : $A \subset \mathcal{O}_1$: A est connexe. □

Exercice 73
Soient (E,d) un espace métrique, $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une famille de sous-espaces connexes de E telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on ait : $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$.
Démontrer que $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ est connexe.

9.3 Composantes connexes

Théorème-définition 49
Soient (E,d) un espace métrique et $a \in E$.

1. *L'ensemble des connexes de E qui contiennent a admet un plus grand élément pour l'inclusion appelé composante connexe de a dans E.*
2. *Deux composantes connexes de E sont soit disjointes, soit égales.*
3. *Une composante connexe de E est fermée dans E.*

Exercice 74
Démontrer le théorème 49.

Définition 32 *Un espace métrique est dit totalement disconnexe lorsque toutes ses composantes connexes sont réduites à un point.*

Exercice 75

1. Justifier qu'un espace métrique discret est totalement disconnexe.
2. Démontrer que $\mathbb{Q}$ est totalement disconnexe.

9.4 Connexité et applications continues

Théorème 50
L'image continue d'un connexe est un connexe. Autrement dit si $f : E \to F$ est continue où (E, d), (F, δ) sont des espaces métriques et si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.

Exercice 76
Démontrer le théorème 50.

Exercice 77
Démontrer que $]-1, 1[$ est connexe puis que $\overline{\mathbb{R}}$ est connexe.

Corollaire 50.1
Soient (E, d) un espace métrique connexe non vide, (F, δ) un espace métrique discret. Si $f : E \to F$ est continue alors f est constante.

Démonstration. Comme E est connexe et f continue, $f(E)$ est un sous-espace connexe de F donc un singleton. □

Exercice 78
Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on ait : $f(x)^2 - 3f(x) - 2 = 0$.

Théorème 51
Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les convexes de $\mathbb{R}$ i.e. les intervalles de $\mathbb{R}$.

Exercice 79
Démontrer le théorème 51

Corollaire 51.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)
L'image continue d'un intervalle par une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un intervalle.

9.5 Produit fini de connexes

Théorème 52
Soient (E_i, d_i) des espaces métriques (pour $i \in \{1, \dots, n\}$) et $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ l'espace métriques produit. Alors E est connexe si et seulement si chaque E_i est connexe.

Démonstration.
• Si E est connexe, chaque projection est continue, donc chaque E_i est connexe.

• Je démontre le résultat pour $n = 2$ (faire une récurrence après).
Soit $m = (x_0, y_0) \in E = E_1 \times E_2$.
On note C la composante connexe de m et on montre que $C = E$.
Pour tout $y \in E_2$, (x_0, y) est dans C car $\{x_1\} \times E_2$ est connexe (puisque homéomorphe à E_2) et contient m et (x_0, y).
Si maintenant $(x, y) \in E$, (x, y) est aussi dans C car $E_1 \times y$ est connexe (puisque homéomorphe à E_1) et contient m et (x, y). □

Remarque 9.3
Ainsi $\mathbb{R}^n$ est connexe.

10 Connexité par arcs

10.1 Généralités

Définition 33 *Un chemin dans un espace métrique (E, d) est une application continue $c : [0, 1] \to E$.*

Définition 34 *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.*

1. *On dit que E connexe par arcs lorsque deux points quelconques de E sont reliés par un chemin dans E.*
2. *On dit que A est connexe par arcs lorsque (A, d_A) est connexe par arcs.*

Remarque 10.1

1. Si (E,d) est un espace métrique, si x, y et z sont dans E et si c_1 est un chemin de x à y dans E, c_2 un chemin de y à z dans E alors :

$$c : t \mapsto \begin{cases} c_1(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ c_2(2t-1/2) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

   est un chemin de x à z dans E.
2. Toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.
3. Toute partie étoilée A d'un espace vectoriel normé (i.e. une partie A de E telle que tout point de A est relié à un point fixe x_0 dans A par un chemin dans A) est connexe par arcs.

10.2 Propriétés des espaces connexes par arcs

Théorème 53
Soient (E,d) un espace métrique, $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces connexes par arcs de E « qui s'intersectent deux à deux ».
Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exercice 80
Démontrer le théorème 53.

10.3 Composantes connexes par arcs

Théorème-définition 54
Soient (E,d) un espace métrique et $a \in E$.

1. *L'ensemble des connexes par arcs de E qui contiennent a admet un plus grand élément pour l'inclusion appelé composante connexe par arcs de a dans E.*
2. *La composante connexe par arcs de a est incluse dans la composante connexe de a.*
3. *Deux composantes connexes par arcs de E sont soit disjointes, soit égales.*
4. *Deux points de E appartiennent à une même composantes connexe par arcs si et seulement s'ils sont reliés par un chemin dans E.*

Exercice 81
Démontrer le théorème 54.

10.4 Connexité et applications continues

Théorème 55
L'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.

Exercice 82
Démontrer le théorème 55.

10.5 Connexité par arcs versus connexité

Théorème 56
Tout espace connexe par arcs est connexe.

Exercice 83
Démontrer le théorème 56.

Exercice 84
On pose $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > \quad \text{et} \quad y = \sin(1/x)\right\}$ et $X = A \cap \{(0,0)\}$.

1. Démontrer que A est connexe par arcs et que A est connexe.
2. Démontrer que si $m \in A$ alors $A \setminus \{m\}$ et $X \setminus \{m\}$ sont disconnexes.
3. Démontrer que X n'est pas connexe par arcs.

11 Compléments

11.1 Produit dénombrables d'espaces métriques

Exercice 85
Soit (E_n,d_n) une famille d'espace métriques telle que chaque distance d_n soit bornée par 1. On considère l'ensemble produit $E = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Ainsi, tout élément x de E s'écrit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque x_k est dans E_k.
On fixe $\lambda > 1$ réel.

1. Démontrer que l'on définit correctement une distance sur E en posant, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E :

$$d_\lambda(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} d_n(x_n,y_n).$$

2. On note $\mathcal{T}_\lambda$ l'ensemble des ouverts de (E,d_λ).
   Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de E de la forme $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ où la famille $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}_n$ est un ouvert de E_n ;
— L'ensemble des n entiers tels que $\mathcal{O}_n \neq E_n$ est fini.

a) Démontrer que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_\lambda$.

b) Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}_\lambda$ i.e. que tout ouvert de E est union d'éléments de $\mathcal{B}$.

3. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathrm{pr}_n : E \to E_n$ la projection naturelle. Démontrer que $\mathcal{T}_\lambda$ est la moins fine des topologies métriques qui rendent continue toutes les applications pr_n, i.e. si $\mathcal{T}_\delta$ est l'ensemble des ouverts de (E, δ) où δ est une distance sur E alors $\mathcal{T}_\lambda \subset \mathcal{T}_\delta$.

4. **Propriété universelle de l'espace métrique produit** E.
Soient (X, δ) un espace métrique et $f : X \to E$. Alors f est continue si et seulement si chaque $\mathrm{pr}_n \circ f : X \to E_n$ est continue.

Remarque 11.1
On peut noter que $\mathcal{T}_\lambda$ ne dépend en fait pas de $\lambda > 1$, puisque c'est le cas de $\mathcal{B}$.

11.2 Produit dénombrable d'espaces métriques compacts

Exercice 86
On reprends les notations de l'exercice 85. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'espace métrique (E_n, d_n) est compact.
Démontrer que (E, d_λ) est compact.

Exercice 87 (Le cube de Hilbert comme compact métrique universel)
On considère $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance produit d_2 (voir exercice 85). Soit (X, δ) un espace métrique compact.

1. Démontrer qu'il existe une distance d sur X équivalente à δ et bornée par 1.
2. Démontrer que X contient une partie dénombrable dense $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On considère l'application :

$$j = \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & [0,1]^{\mathbb{N}} \\ x & \longmapsto & (d(x, a_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{pmatrix}.$$

Démontrer que j induit un homéomorphisme de X sur $j(X)$.