SIMPLICITÉ DU GROUPE DÉRIVÉ DU GROUPE PLEIN TOPOLOGIQUE

GUILLAUME BULTEAU

Résumé.

Sommaire

1. Introduction 1
1.1. Notations 1
1.2. Fonction de premier retour sur A 2
1.3. Fonction induite 2
1.4. Des résultats intermédiaires 3
2. Le résultat principal 8

1. Introduction

1.1. **Notations.** Soit X un espace topologique compact totalement séparé : pour tout a et b distincts dans X, il existe un ouvert-fermé A de X tel que $a \in A$ et $b \notin A$. .

Pour $\varphi \in \mathrm{Homeo}(X)$ et $x \in X$, on note :

$$\Omega_\varphi(x) = \{\varphi^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Le support de φ est l'ensemble ouvert :

$$\mathrm{Supp}(\varphi) = \{x \in X \mid \varphi(x) \neq x\}.$$

On dit que φ est minimal lorsque chaque $\Omega_\varphi(x)$ est dense dans X.

On note $[\varphi]$ l'ensemble des homéomorphismes f de X tel que $f(x) \in \Omega_\varphi(x)$ pour tout x dans X. Autrement dit un homéomorphisme f de X est dans $[\varphi]$ lorsque, pour tout $x \in X$, il existe $n_x \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x) = \varphi^{n_x}(x)$.

La fonction $n_f : x \mapsto n_x$ s'appelle le cocycle associé à f.

Le groupe plein-topologique $[\![\varphi]\!]$ est l'ensemble des éléments f de $[\varphi]$ tels que $n_f : X \to \mathbb{Z}$ est continue.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de X. Lorsque φ est minimal, $\mathcal{O}$ rencontre chaque orbite de φ : pour tout x dans X, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi^n(x) \in A$. Ainsi on a :

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(\mathcal{O}).$$

1.2. **Fonction de premier retour sur A.** Soit A un ouvert-fermé de X.

Fait 1. *Pour tout $a \in A$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid \varphi^n(a) \in A\}$ est non vide.*

En effet, comme $X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(A)$, par compacité de X, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ telle que $X = \bigcup_{n=-m}^{m} \varphi^n(A)$. De là :

$$X = \varphi^{m+1}(X) = \bigcup_{n=1}^{2m+1} \varphi^n(A).$$

Ainsi, pour tout a dans A, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \in \varphi^n(A)$.

On peut ainsi correctement définir une fonction (continue)

$$n_A : A \to \mathbb{N},$$

en posant $n_A(a) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid \varphi^n(a) \in A\}$. C'est la fonction de premier retour dans A.

Posons alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = n_A^{-1}(k)$ (ligne de niveau k de la fonction $n_A : A \to \mathbb{N}^*$). Chaque A_k est un ouvert-fermé de X et on a une partition :

$$X = \bigsqcup_{k\geqslant 1} \bigsqcup_{i=0}^{k-1} \varphi^i(A_k).$$

1.3. **Fonction induite.** Ici A est un ouvert-fermé de X. On définit un élément φ_A de $\mathrm{Homeo}(X)$ en posant :

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \varphi^{n_A(x)}(x) & \text{si } x \in A \\ x & \text{sinon} \end{cases}.$$

Lemme 1. *φ_A est un élément de $[\![\varphi]\!]$ et $\varphi^{-1}\varphi_A$ est périodique.*

Démonstration. On prolonge n_A en une fonction continue à X, encore notée n_A, en posant $n_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Cette application n_A est continue et $\varphi_A(x) = \varphi^{n_A(x)}(x) \in [\![\varphi]\!]$.

Puis on pose, pour x dans X :

$$\begin{cases} v(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid \varphi^n(x) \in A\} \\ u(x) = \max\{n \in \mathbb{Z}^- \mid \varphi^n(x) \in A\} \end{cases}.$$

Notons que si $x \in A$, alors $v(x) = n_A(x)$ et $u(x) = 0$, et si $x \notin A$ alors

$$v(x) - u(x) = n_A(\varphi^{u(x)}(x)),$$

relation valable en fait pour tout $x \in X$. Ainsi $1 \leqslant v - u \leqslant \max n_A$, par définition de n_A. De plus, pour tout x dans X, on a :

$$\left(\varphi^{-1}\varphi_A\right)^{v(x)-u(x)}(x) = x.$$

En effet :

— Si $x \in A$, $\varphi_A(x) = \varphi^{v(x)}(x)$ donc $(\varphi^{-1}\varphi_A)(x) = \varphi^{v(x)-1}(x) \notin A$.
De là $\varphi_A(\varphi^{v(x)-1}(x)) = \varphi^{v(x)-1}(x)$ et ainsi $(\varphi^{-1}\varphi_A)^2(x) = \varphi^{v(x)-2}(x)$. On continue ainsi jusqu'à $\varphi^{v(x)-v(x)}(x) = x$.

— Si $x \notin A$, on a : $(\varphi^{-1} \circ \varphi_A)(x) = \varphi^{-1}(x) \notin A$ si $u(x) < -1$.
Comme précédemment :

$$(\varphi^{-1} \circ \varphi_A)^{-u(x)}(x) = \varphi^{u(x)}(x) \in A$$

Puis :

$$\begin{aligned} \varphi_A\big(\varphi^{u(x)}(x)\big) &= \varphi^{n_A(\varphi^{u(x)}(x))}(\varphi^{u(x)}(x)) \\ &= \varphi^{v(x)-u(x)}(\varphi^{u(x)}(x)) = \varphi^{v(x)}(x) \end{aligned}$$

Ainsi $(\varphi^{-1}\varphi_A)(\varphi^{-1} \circ \varphi_A)^{-u(x)}(x) = \varphi^{v(x)-1}(x) \notin A$. On itère à nouveau, comme dans le cas précédent :

$$(\varphi^{-1}\varphi_A)^{v(x)}(\varphi^{-1} \circ \varphi_A)^{-u(x)}(x) = \varphi^{v(x)-v(x)}(x) = x.$$

On a alors $(\varphi^{-1}\varphi_A)^n = \mathrm{Id}_X$ avec $n = (\max n_A)!$. □

Remarque 1. Le résultat s'applique dès que toutes les orbites de $\varphi \in \mathrm{Homeo}(X)$ rencontrent A

1.4. **Des résultats intermédiaires.**

Lemme 2. *Soit $f \in \mathrm{Homeo}(X)$ et $n \geqslant 1$ entier. On suppose que chaque f^i est sans point fixe pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.*

Il existe alors U ouvert-fermé de X tel que les $f^i(U)$ soient disjoints pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, avec :

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(U).$$

En particulier, si $f^n = \mathrm{Id}_X$ et si f définit une action libre alors on a une partition de X :

$$X = \bigsqcup_{0 \leqslant i \leqslant n-1} f^i(U).$$

Démonstration. • On choisit, pour $x \in X$ un voisinage V_x de x disjoint de $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n-1} f^i(V_x)$.

Par compacité, on a un recouvrement fini $V_1, \ldots, V_p$ de X. Pour $1 \leqslant k \leqslant p$ on pose :

$$X_k = V_k \setminus \bigcup_{\substack{0<j<k \\ -n<i<n}} f^i(V_j).$$

Par exemple $X_1 = V_1$, $X_2 = V_2 \setminus \bigcup_{-n<i<n} f^i(V_1)$ et

$$X_3 = V_3 \setminus \left(\left(\bigcup_{-n<i<n} f^i(V_1) \right) \cup \left(\bigcup_{-n<i<n} f^i(V_2) \right) \right)$$

On prend $U = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant p} X_k$.

• Les $f^i(U)$ soient disjoints pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Supposons que $y \in f^k(U) \cap f^\ell(U)$ avec $0 \leqslant k < \ell \leqslant n-1$. On dispose alors de $x_k \in U$ et $x_\ell \in U$ tels que $x_\ell = f^{\ell-k}(x_k)$.

Il existe alors i_k et i_ℓ dans $\{1,\dots,p\}$ tel que $x_k \in X_{i_k} \subset V_{i_k}$ et $x_\ell \in X_{i_\ell} \subset V_{i_\ell}$. On suppose par exemple que $i_\ell \leqslant i_k$.

— Si $i_k = i_\ell$, alors x_k et x_ℓ sont dans X_{i_k}, et ainsi X_{i_ℓ} contient x_k et $f^{k-\ell}(x_k)$ et il en va de même de V_{i_k}. Mais $f^{k-\ell}(x_k) \in f^{k-\ell}(V_{i_k})$ qui est disjoint de V_{i_k} : c'est une contradiction.
— On a donc $i_\ell < i_k$. Mais X_{i_k} ne contient pas $\bigcup_{-n<i<n} f^i(V_{i_\ell})$, ce qui contredit le fait que $x_k = f^{\ell-k}(x_\ell)$.

• Prenons maintenant x dans X. Il est recouvert : il existe $i \in \{1,\dots,p\}$ tel que $x \in V_i$. On a alors deux cas.

— Soit $x \in X_i$ et alors $x \in U$.
— Soit $x \in f^{j_1}(V_{\ell_1})$ pour un certain couple $(-j_1, \ell_1)$ tel que $-n < j < n$ et $\ell_2 \in \{1,\dots,i-1\}$. Appelons $x_{\ell_1} = f^{-j_1}(x)$. Ce x_{ℓ_1} est dans V_{ℓ_1}. On a alors deux cas.

  — Soit $x_{\ell_1} \in X_{\ell_1}$ et alors $x \in f^{j_1}(X_{\ell_1}) \subset f^{j_1}(U)$.
  — Soit $x_{\ell_1} = f^{j_2}(V_{\ell_2})$ pour $j_2 \in]-,n,n[$ et $\ell_2 \in \{1,\dots,\ell-1\}$. Appelons $x_{\ell_2} = f^{-j_2}(x_{\ell_1}) = f^{-j_2-j_1}(x)$. Ce x_{ℓ_2} est dans V_{ℓ_2}. On a alors deux cas...
  On itère ce raisonnement que se termine, dans le moins bon cas, en $x_{\ell_\alpha} \in X_1$. Ainsi x est bien dans un $f^n(U)$...

□

Notation. φ étant un homéomorphisme minimal d'un espace totalement séparé X, l'ensemble $\mathcal{M}_\varphi(X)$ des mesures de probabilités boréliennes φ-invariantes (i.e. telles que $\mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) = \mu(B)$ pour tout borélien) est compact pour la topologie faible-* : (μ_n) converge vers μ lorsque pour tout $f : X \to \mathbb{R}$ continue :

$$\int f \mathrm{d}\mu_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \int f \mathrm{d}\mu.$$

On pose, pour U ouvert de X :

$$M^+(U) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_\varphi(X)} \mu(U) \quad \text{et} \quad M^-(U) = \inf_{\mu\in\mathcal{M}_\varphi(X)} \mu(U).$$

Lemme 3. *Soit $\varphi \in \mathrm{Homeo}(X)$, minimal. Pour tout $g \in [\![\varphi]\!]$ et $\varepsilon > 0$, il existe $g_1,\dots,g_m$ dans $[\![\varphi]\!]$ tels que :*

$$g = g_1 \circ \cdots \circ g_m,$$

et $M^+(\mathrm{supp}(g_i)) < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$.

Si de plus g est périodique de période n, on peut s'arranger pour que chaque g_i aussi.

Démonstration. Comme les orbites de φ sont infinies, tout x dans X possède un voisinage ouvert-fermé U_x tel que $M^+(U_x) \leqslant \varepsilon$.

On distingue trois cas.

— Si $g^n = 1$, alors tout x de X possède des voisinages g-invariants de M^+ arbitrairement petit : il suffit de prendre $\bigcup_{i=0}^{n-1} g^i(U_x)$.

Par compacité, on obtient une partition finie de X, $(U_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ en ouvert-fermés de X qui sont g-invariant tels que $\mu(U_j) < \varepsilon$ pour tout μ.

Cela induit une décomposition $g = g_1 \circ \cdots \circ g_m$.

On définit g_j de la manière suivante : $g_j(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in U_j \\ x & \text{sinon} \end{cases}$

— Lorsque g n'a aucune orbite finie. On choisit n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.

Comme g^i est sans point fixe pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on peut appliquer le lemme 2 qui permet de dire qu'il existe un ouvert-fermé U de X tel que les $g^i(U)$ soient disjoints pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, avec :

$$X = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} g^p(U).$$

Si maintenant $\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X)$, μ est aussi g-invariante, puisque $g \in [\![\varphi]\!]$. On a alors, pour $\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X)$:

$$1 \geqslant \mu\left(\bigcup_{0\leqslant i\leqslant n-1} g^i(U)\right) = n\mu(U).$$

Il en résulte que $M^+(U) \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.

On écrit alors $g = g_U \circ \left(g_U^{-1} \circ g\right)$. Selon le lemme 1, $g_U^{-1} \circ g$ est périodique. On peut décomposer $g_U^{-1} \circ g$ via le cas périodique et on est rendu car $\mathrm{supp}(g_U) \subset U$ donc $\mu(\mathrm{supp}(g_U)) \leqslant \varepsilon$.

— Dans le cas général (orbites de g quelconques...). Pour N grand $g \circ \varphi^N$ et φ^{-N} n'ont pas d'orbite finie : on décompose chacune par le cas précédent.

□

Lemme 4. *Soient X un espace compact totalement séparé, infini, $\varphi \in \mathrm{Homeo}(X)$, minimal. Soient A et B des ouverts-fermés de X tels que $\mu(B) \leqslant \mu(A)$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X)$. Il existe alors $\alpha \in [\![\varphi]\!]'$ tel que $\alpha(B) \subset A$.*

Démonstration du lemme 4. Il y a deux étapes.

Etape 1. On pose $f = \mathbb{1}_A - 1_B$, de sorte que $\displaystyle\int f\mathrm{d}\mu > 0$, et ce pour tout $\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X)$. Il existe $c > 0$, $N_0 \geqslant 5$ tels que, pour tout $N \geqslant N_0$ et tout $x \in X$ on a :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f\big(\varphi^i(x)\big) \geqslant c.$$

On raisonne par l'absurde : pour tout $c > 0$ et tout $N_0 \geqslant 5$, il existe $N \geqslant N_0$ et x dans X tel que :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(\varphi^i(x)) < c.$$

On prend, pour $k \in \mathbb{N}$, $c = 2^{-k}$. Il existe alors (N_k) telle que $N_k \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et (x_k) suite dans X telle que :

$$\frac{1}{N_k}\sum_{i=0}^{N_k-1} f(\varphi^i(x_k)) < 2^{-k}.$$

On pose $\mu_k = \dfrac{1}{N_k}\displaystyle\sum_{i=0}^{N_k-1} \varphi^i_*\delta_{x_k}$, de sorte que :

$$\int f\mathrm{d}\mu_k \leqslant 2^{-k} = \frac{1}{N_k}\sum_{i=0}^{N_k-1}\int f\mathrm{d}(\varphi^i_*\delta_{x_k}) = \frac{1}{N_k}\sum_{i=0}^{N_k-1}\int f\circ\varphi^i\mathrm{d}\delta_{x_k}.$$

Ainsi $\displaystyle\int f\mathrm{d}\mu_k = \frac{1}{N_k}\sum_{i=0}^{N_k-1} f(\varphi^i(x_k)) < 2^{-k}$.

Par compacité de $\mathcal{M}_\varphi(X)$, quitte à extraire, la suite (μ_k) converge vers μ pour la topologie faible-*. Par passage à la limite $\displaystyle\int f d\mu \leqslant 0$, ce qui est une contradiction.

Etape 2. On considère un ouvert-fermé U inclus dans A tel que les $\varphi^i(U)$, pour $0 \leqslant i \leqslant N_0 - 1$ soient disjoints.

On peut alors considérer le fonction de premier retour n_A sur U (car φ est minimal). Rappelons que, pour $x \in A$, on a :

$$n_A(x) = \inf\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid \varphi^n(x) \in A\right\}.$$

On sait que n_A est continue (d'image finie). Soit κ le maximum de cette fonction.

On peut trouver une partition en ouvert-fermés (U'_ℓ) de U telle que n_A soit constante sur chaque élément de cette partition.

On prend alors $i \in \{0, \ldots, n_A(U'_\ell) - 1\}$.

— Les $\varphi^i(U'_\ell)$ sont deux à deux disjoints. En effet, si $y \in \varphi^j(U'_\ell) \cap \varphi^k(U'_\ell)$ avec $j < k$ dans $\{0, \ldots, n_A(U'_\ell) - 1\}$ alors on dispose de x et y dans U'_ℓ tel que $\varphi^k(x) = \varphi^j(y)$, d'où $y = \varphi^{k-j}(x)$ et ainsi, puisque $y \in A$, $n_A(x) = k - j < n_A(U'_\ell)$, ce qui est absurde, puisque $x \in U'_\ell$.

— Les $\varphi^i(U'_\ell)$ forment une partition de X :

$$X = \bigsqcup_{\ell=1}^{m} \bigsqcup_{i=0}^{k(U'_\ell)-1} \varphi^i(U'_\ell).$$

On raffine la partition (U'_ℓ) de U en une partition en ouvert-fermés (U_j) telle que, pour $0 \leqslant i \leqslant n_A(U_j) - 1$, chaque $\varphi^i(U_j)$ soit inclus dans l'un des ensembles : $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ ou $X \setminus A \cup B$.

On a autant :

$$X = \bigsqcup_{j=1}^{q} \underbrace{\bigsqcup_{i=0}^{k(U_j)-1} \varphi^i(U_j)}_{=T_j}.$$

Chaque T_j s'appelle une « tour ». On note alors, pour chaque j :

— A_j l'ensemble des i dans $\{0, \dots, n_A(U_j) - 1\}$ tel que $\varphi^i(U_j) \subset A \setminus B$;
— B_j l'ensemble des i dans $\{0, \dots, n_A(U_j) - 1\}$ tel que $\varphi^i(U_j) \subset B \setminus A$;
— C_j l'ensemble des i dans $\{0, \dots, n_A(U_j) - 1\}$ tel que $\varphi^i(U_j) \subset A \cap B$;
— D_j l'ensemble des i dans $\{0, \dots, n_A(U_j) - 1\}$ tel que $\varphi^i(U_j) \subset X \setminus A \cup B$.

Si maintenant $x \in U_j$, on a, pour $i \in \{0, \dots, n_A(U_j) - 1\}$:

$$f \circ \varphi^i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A_j \\ -1 & \text{si } i \in B_j \end{cases}.$$

Ainsi $\operatorname{card}(A_j) - \operatorname{card}(B_j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n_A(U_j)-1} f(\varphi^i(x)) > 0$ d'après l'étape 1.

Il en résulte que, pour tout j, il existe une permutation de σ_j de $\{0, \dots, n_A(U_j) - 1\}$ telles que :

$$\sigma_j(B_j) \subset A_j,\ \sigma_j(C_j) = C_j \ \text{ et } \ \sigma_j(D_j) = D_j.$$

On définit ainsi un élément α de $[\![\varphi]\!]$ qui stabilise T_j et tel que $\alpha(B) \subset A$, en posant, pour x dans T_j

$$\alpha(x) = \varphi^{\sigma_j(i)}(x).$$

— α laisse T_j stable : c'est évident.
— Si $x \in A$, on dispose de j tel que $x \in T_j$. Il existe alors $i \in \{0, \dots, n_A(U_j) - 1\}$ tel que $x \in \varphi^i(U_j) \subset A$.

On a alors $\alpha(x) = \varphi^{\sigma_j(i)}(x) \in B$, per définition de σ_j !

En fait on peut même demander à α d'être dans $[\![\varphi]\!]'$.

On peut aussi imposer à σ_j d'être une permutation paire. En effet $n_A(U_j) \geqslant 5$ et l'un, au moins, des ensemble A_j, B_j, C_j et D_j contient deux éléments : on peut donc composer par une transposition.

Ainsi l'élément α ainsi défini est un commutateur donc dans $[\![\varphi]\!]'$. □

2. Le résultat principal

Théorème 1. *Soient X un espace compact totalement séparé infini et $\varphi \in \mathrm{Homeo}(X)$, minimal. Alors le groupe dérivé $[\![\varphi]\!]'$ est simple. De plus si N est un sous-groupe distingué non trivial de $[\![\varphi]\!]$ alors $[\![\varphi]\!]' \subset N$.*

Démonstration. • **Etape 1**. *Si deux éléments g et h de $[\![\varphi]\!]$ sont de support « suffisamment petit » alors $[g,h] \in \mathbb{N}$.*

On dispose de $f \in N$, non trivial. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert-fermé non vide disjoint de $f(\mathcal{O})$. On considère l'application

$$\Phi : \mathcal{M}_\varphi(X) \to [0,1],$$

définie par $\Phi(\mu) = \mu(\mathcal{O})$. Cette application est continue. Par compacité de $\mathcal{M}_\varphi(X)$, on a :

$$\varepsilon = M^-(U) > 0.$$

Soient g et h dans $[\![\varphi]\!]$ tels que $M^+\big(\mathrm{supp}(g)\big) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $M^+\big(\mathrm{supp}h\big) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. On pose :

$$U = \mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(h).$$

On a alors $M^+(U) \leqslant \varepsilon = \mathcal{M}^-(\mathcal{O})$. Selon le lemme 4, il existe $\alpha \in [\![\varphi]\!]'$ tel que $\alpha(U) \subset \mathcal{O}$.

On pose alors $q = \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$, qui est un élément de N.

Puis $\widetilde{h} = [h,q] = \underbrace{hqh^{-1}}_{\in N} q^{-1}$ appartient à N, donc $[g,\widetilde{h}] \in N$.

De plus $q(U) \cap U = \emptyset$: il en résulte que g^{-1} et qhq^{-1} commutent. Ainsi :

$$[g,h] = gh\big(qh^{-1}q^{-1}\big)g^{-1}\big(qhq^{-1}\big)h^{-1} = ghg^{-1}h^{-1} = [g,h],$$

ce qui démontre que $[g,h] \in N$.

• **Etape 2**. On prend maintenant deux éléments g et h de $[\![\varphi]\!]$. On les décompose selon le lemme 3 : $g = g_1 \circ \cdots \circ g_p$ et $h = h_1 \circ \cdots \circ h_m$ où pour tout couple (i,j) on a :

$$M^+(\mathrm{supp}(g_i) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad M^+(\mathrm{supp}(h_j)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Selon l'étape 1, tous les crochets $[g_i,h_j]$ sont dans N. Mais $[g,h]$ appartient au sous-groupe distingué engendré par ces crochets $[g_i,h_j]$.

> En effet, notons K le sous-groupe normal engendré par ces crochets. On a :
>
> $$\begin{cases} [g_1g_2,h_i] = \underbrace{g_1[g_2,h_i]g_1^{-1}}_{\in K}[g_1,h_i] \\ [g_j,h_1h_2] = [g_j,h_1]\underbrace{h_1[g_j,h_2]h_1^{-1}}_{\in K} \end{cases}$$

Ainsi $[g_1g_2, h_i]$ et $[g_j, h_1h_2]$ sont dans K. Supposons alors que, pour un certain $n \in \{1, \dots, p-1\}$ entier on ait $[g_1g_2\cdots g_n, h_i] \in K$. On a alors, en notant $g = g_1 \cdots g_n$:

$$[gg_{n+1}, h_i] = g[g_{n+1}h_i]g^{-1}[g, h_i] \in K.$$

Bilan. Tous sous-groupe distingué non trivial N de $[\![\varphi]\!]$ contient $[\![\varphi]\!]'$.

On veut maintenant montrer que $[\![\varphi]\!]'$ ne contient pas de sous-groupe distingué non trivial. On suppose maintenant que N est un sous-groupe distingué dans $[\![\varphi]\!]'$, non trivial.

On veut en fait montrer que $[\![\varphi]\!]' \subset N$. Comme précédemment, il suffit de montrer que pour tout g et h dans $[\![\varphi]\!]$, on a $[g, h] \in N$. Manque de pot, on ne peut pas appliquer le même argument tel quel (voir la définition de $\widetilde{h}$: il faudrait que $h \in [\![\varphi]\!]'$).

En fait, tout est OK, car $[\![\varphi]\!]' = [\![\varphi]\!]''$!!!!!

Lemme 5. $[\![\varphi]\!]' = [\![\varphi]\!]''$

Démonstration. $[\![\varphi]\!]''$ est distingué dans $[\![\varphi]\!]$, comme sous-groupe caractéristique du groupe distingué $[\![\varphi]\!]'$. Reste à montrer qu'il est non trivial ! □

On sait que le commutant de $[\![\varphi]\!]'$ dans $\mathrm{Homeo}(X)$ **est trivial. Il existe donc f non trivial dans $N \cap [\![\varphi]\!]'$.** □

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier (I3M), UMR 5149 CNRS - Université Montpellier 2, Case courrier 051, 34095 Montpellier cedex 5 - France

E-mail address: guillaume.bulteau@ac-montpellier.fr