$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, suites numériques

Table des matières

1 Dénombrabilité, bijections **1**
1.1 Injection, surjection, bijection 1
1.2 Généralités sur la dénombrabilité 2

2 Le corps ordonné $\mathbb{R}$ **4**
2.1 Généralités 4
2.2 Borne supérieure 5
2.3 L'axiome de la borne supérieure et ses conséquences . . . 5
2.4 Propriétés algébriques de $\mathbb{R}$ liées à son ordre 6

3 Valeurs d'adhérence d'une suite complexe **7**
3.1 Extractions 7
3.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass 8
3.3 Limite inf et limite sup 8

1 Dénombrabilité, bijections

1.1 Injection, surjection, bijection

Définition 1 *Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.*

- *On dit que f est injective lorsque pour tout $(x, x') \in X^2$ on a :*

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

- *On dit que f est surjective lorsque* $\mathrm{Im}\, f = Y$ *où* $\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Exercice 1
Soient X et Y deux ensembles

1. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.
   Démontrer que g est surjective et que f est injective.
2. Soit $f : X \to Y$.
   a) Démontrer que f est surjective si et seulement s'il existe $s : Y \to X$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_Y$.
   b) Démontrer que f est injective si et seulement s'il existe $r : Y \to X$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Théorème 1
Soient X et Y deux ensembles. Alors il existe une injection $f : X \to Y$ si et seulement s'il existe une surjection $g : Y \to X$.

Exercice 2
Démontrer le théorème 1.

Exercice 3
On considère $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par $f(p, q) = 2^p(2q + 1)$. Démontrer que f est bijective.

Exercice 4
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que les ensembles $]-1, 1[$, $]a, b[$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection.

Exercice 5
Trouver une bijection de $]0, 1]$ sur $]0, 1[$.

Exercice 6
Soient X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On note $\{0,1\}^X$ l'ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de surjection de X sur $\mathcal{P}(X)$.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont en bijection.

Exercice 7
A l'aide de l'écriture décimale propre d'un réel, trouver une bijection de $[0,1[$ sur $[0,1[^2$.

1.2 Généralités sur la dénombrabilité

Définition 2 *Un ensemble E est dit au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ainsi lorsque E est dénombrable on peut numéroter ses éléments et écrire $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 8
1. Démontrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.
2. **Procédé diagonal de Cantor.** Démontrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$, n'est pas dénombrable.

1. Soit $A \subset \mathbb{N}$ une partie infinie de $\mathbb{N}$. On note :

$$\begin{cases} x_0 = \min A & \text{(existe car } A \text{ est non vide)} \\ x_1 = \min A \setminus \{x_0\} \\ x_2 = \min A \setminus \{x_0, x_1\} \\ \vdots \end{cases}$$

On a alors une suite (x_k) d'éléments de A, distincts deux à deux, et $k \mapsto x_k$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A.

2. On suppose que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable. On peut alors énumérer ses éléments $x_0, x_1, x_2, \ldots$ qui sont des suites. On définit alors la suite y en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$y(n) = 1 - x_n(n)$$

Cette suite est bien dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et n'est égale à aucune des suites x_k puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, le terme $y(k)$ n'est jamais égal à $x_k(k)$.

Théorème 2
1. *Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.*
2. *Si E est au plus dénombrable et si $f : E \to F$ est surjective alors F est au plus dénombrable.*

Exercice 9
Démontrer le théorème 2.

1. • On suppose qu'il existe une surjection de $f : \mathbb{N} \to E$. Il existe donc $g : E \to \mathbb{N}$ injective (selon le théorème 1). De là $g : E \to g(E) \subset \mathbb{N}$ est bijective ce qui prouve que E est au plus dénombrable.

   • On suppose que E est au plus dénombrable. Alors :
   - ou bien E est fini et il existe une injection $g : E \hookrightarrow \mathbb{N}$ donc une surjection $\mathbb{N} \to E$ (selon le théorème 1).
   - ou bien E est dénombrable et alors il existe $\sigma : \mathbb{N} \to E$ bijective donc surjective.

2. On suppose que E est au plus dénombrable et que $f : E \to F$ est surjective. D'après le premier point du théorème 2, il existe une surjection $\varphi : \mathbb{N} \to E$ et alors $f \circ \varphi : N \to F$ est surjective, donc F est au plus dénombrable.

Exercice 10
1. Démontrer que toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

2. Démontrer que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

1. Soient $F \subset E$ où f est un ensemble au plus dénombrable. On a une injection naturelle $F \to E$ donc une surjection de E sur F selon le théorème 1. On peut alors conclure avec le théorème 2

2. Supposons que $[0,1[$ soit dénombrable. On peut donc énumérer ses éléments : $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $x_n(k)$ la k-ième décimale du « développement propre » du réel x_n.

   On considère alors le réel y de partie entière 0 dont la k-ième décimale ($k \in \mathbb{N}$) est :

$$y(k) = \begin{cases} 9 - x_k(k) & \text{si } x_k(k) \neq 0 \\ 1 & \text{si } x_k(k) = 0 \end{cases}$$

   Ce réel y est bien dans $[0,1]$ est n'est pas dans la liste $x_0, x_1, x_2, \ldots$, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, sa k-ième décimale diffère de celle de x_k.

Théorème 3

1. *Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
2. *Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*
3. *Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Exercice 11

Démontrer le théorème 3

1. Soient E et F des ensembles dénombrables. Il existe donc des applications $\sigma_E : \mathbb{N} \to E$ et $\sigma_F : \mathbb{N} \to F$ bijectives. Alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & E \times F \\ (m,n) & \longmapsto & (\sigma_E(m), \sigma_F(n)) \end{pmatrix}$$

   est surjective. Enfin $E \times F$ contient $E \times \{*\}$, où $*$ est un élément quelconque de E, qui est infini

   On procède alors par récurrence pour un produit fini.

2. • Pour $\mathbb{N}^2$ un dessin suffit !

   • L'application $f = \begin{pmatrix} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (m,n) & \longmapsto & (-1)^m n \end{pmatrix}$ est surjective. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, $\mathbb{Z}$ est au plus dénombrable selon le théorème 2 et infini, car il contient $\mathbb{N}$.

   • L'application $g = \begin{pmatrix} \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (m,n) & \longmapsto & \dfrac{n}{m} \end{pmatrix}$ est surjective et $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ est dénombrable.

3. Soient I un ensemble dénombrable et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensemble dénombrable. Pour tout $i \in I$ il existe une bijection $\sigma_i : \mathbb{N} \to E_i$. Alors :

$$f = \begin{pmatrix} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i \\ (i,n) & \longmapsto & \sigma_i(n) \end{pmatrix}$$

   est surjective. Comme $I \times \mathbb{N}$ est dénombrable, $\displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i$ est au plus dénombrable. Comme il contient une partie infinie, c'est un ensemble dénombrable.

Exercice 12

1. Démontrer que $\mathbb{Q}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, est dénombrable.
2. Un complexe α est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et dans le cas contraire il est dit *transcendant*. Démontrer qu'il existe des nombres transcendants.

1. On a $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de degré inférieur à n.
   Mais chaque $\mathbb{Q}_n[X]$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^{n+1}$ qui est dénombrable, donc $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable en tant qu'union dénombrable d'ensembles dénombrables.

2. Pour $P \in \mathbb{Z}[X]$, on note $Z_{\mathbb{C}}(P)$ l'ensemble des racines complexes de P. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques. On a :
$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{P\in\mathbb{Z}[X]\setminus\{0\}} Z_{\mathbb{C}}(P).$$

Exercice 13 (Le théorème de Cantor-Bernstein)
Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une application injective $f : X \to Y$ et une application injective $g : Y \to X$.
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Berstein qui affirme qu'alors X et Y sont en bijection.

1. On suppose de plus dans cette première question que $Y \subset X$. On définit alors une suite de parties de X en posant :
$$\begin{cases} X_0 = X \setminus Y \\ X_n = f(X_{n-1}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$
   On pose également $\widehat{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
   a) Démontrer que l'on définit correctement une application $h : X \to Y$ en posant :
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \widehat{X} \\ x & \text{si } x \in X \setminus \widehat{X} \end{cases}.$$
   b) Démontrer que h est une bijection.
2. En déduire le théorème de Cantor-Bernstein.

1. a) Pour tout $x \in \widehat{X}$, on a bien $f(x) \in Y$. Si maintenant $x \in X \setminus \widehat{X}$ alors $x \notin X_0$ donc $x \in Y$. On a donc bien défini une application de X dans Y.

   b) • Montrons que h est surjective. Soit $y \in Y$. On a deux cas :
   — **Cas 1 :** $y \in X \setminus \widehat{X}$. On a alors $h(y) = y$ et ainsi $y \in \operatorname{Im} h$.
   — **Cas 2 :** $y \in \widehat{X}$. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Y \in X_n$ (puisque y ne peut appartenir à X_0) et ainsi $y \in f(X_{n-1})$. Il existe donc $x \in X_{n-1}$ tel que $f(x) = y$, donc, par définition de h, comme $x \in \widehat{X}$, il vient $y = h(x) \in \operatorname{Im} h$.
   Dans tous les cas $y \in \operatorname{Im} h$: h est surjective.

   • Montrons que h est injective. Soient x et x' dans X tels que $h(x) = h(x')$. Trois cas se présentent (quitte à changer x en x').
   — **Cas 1 :** x et x' sont dans $\widehat{X}$. On a alors $f(x) = f(x')$ et comme f est injective, il vient $x = x'$.
   — **Cas 2 :** x et x' sont dans $X \setminus \widehat{X}$. On a alors directement $x = x'$.
   — **Cas 3 :** $x \in \widehat{X}$ et $x' \in X \setminus \widehat{X}$. Il vient alors $f(x) = x'$. Mais il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_n$ et alors $f(x) \in X_{n+1}$ donc $x' \in \widehat{X}$, ce qui est absurde. Ce cas ne se présente donc pas.
   On obtient donc $x = x'$ et h est injective.

2. Ici Y n'est plus une partie de X, mais $g(Y)$ qui est en bijection avec Y est une partie de X et $g \circ f$ est une injection, par composition, de X dans $g(Y)$. La question 1 permet d'affirmer que X et $g(Y)$ sont en bijection, donc X et Y aussi.

2 Le corps ordonné $\mathbb{R}$

2.1 Généralités

— $\mathbb{R}$ est un corps commutatif ordonné muni d'une valeur absolue.
— $\mathbb{R}$ est archimédien : pour tout $x > 0$, et tout $y \in \mathbb{R}$, il xiste un entier n tel que $y \leqslant nx$.
— $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: entre deux réels il y a un rationnel. Ainsi :
  1. $\mathbb{Q}$ rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$;
  2. Pour tout x réel, il existe une suite (r_n) dans $\mathbb{Q}$ telle que $r_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$.
— $\mathbb{R}$ est complet : toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente.
— Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$ (et ce sont aussi exactement les parties connexes de $(\mathbb{R}, |\ |)$.

Exercice 14

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $c > 0$. On suppose que $|f| \leqslant c\,|f'|$. Démontrer que $v(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telle que $ff'' = 0$.
   a) Démontrer que $v(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
   b) Démontrer que f est affine.

2.2 Borne supérieure

Définition 3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ (pensez à $[0,1[$ dans ce qui suit).* ***Sous réserve d'existence*** *:*

1. *Un* ***majorant*** *de A* ***dans*** $\mathbb{R}$ *est un réel v tel que pour tout $a \in A$ on ait : $a \leqslant v$.*
2. *Un* ***plus grand élément*** *de A est un majorant de A* ***qui appartient*** *à A*

Exercice 15

1. Démontrer que si M est un plus grand élément de $A \subset \mathbb{R}$ alors M est unique : on note $M = \max A$.
2. Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

Définition 4 ***Sous réserve d'existence****,* ***La borne supérieure de*** *A* ***dans*** $\mathbb{R}$*, notée* $\sup A$*, est le plus petit des majorants de A* ***dans*** $\mathbb{R}$*.*

Théorème 4 (Caractérisations pratiques de la borne supérieure)
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *On a l'équivalence :*

$$\alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall a \in A)(a \leqslant \alpha) \\ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists a_\varepsilon \in A)\,(\alpha - \varepsilon < a_\varepsilon) \end{cases}$$

2. ***Caractérisation séquentielle de la borne supérieure****.*
   Les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (1) $\alpha = \sup A$.
   (2) *Pour tout $a \in A$ on a $a \leqslant \alpha$ et il existe une suite (a_n) dans A telles que $a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.*

Exercice 16
Démontrer le théorème 4.

2.3 L'axiome de la borne supérieure et ses conséquences

Axiome de la borne supérieure. Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1
Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet « une borne supérieure » et une « borne inférieure ».

Théorème 5 (Théorème de la limite monotone - Version pour les suites)
Toute suite réelle croissante admet une limite en $+\infty$.
En particulier une suite réelle croissante et majorée converge.

Théorème 6 (Théorème de la limite monotone - Version pour les fonctions)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

1. *La fonction f admet une limite aux bornes de l'intervalle I.*
2. *La fonction f admet une limite **réelle** à droite et à gauche en tout point de I.*

Définition 5 *Deux suites réelles sont adjacentes lorsque :*

— *l'une est décroissante ;*
— *l'autre est croissante ;*
— *la limite de la différence des deux suites est nulle.*

Théorème 7 (Théorème des suites adjacentes ou des segments emboités)

1. *Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel. Ce réel est l'unique réel ℓ tel que, pour tout n entier naturel, on ait :*
$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$
2. *Soit (S_n) une suite de segments de $\mathbb{R}$ décroissante pour l'inclusion. On suppose que : $\operatorname{diam}(S_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ est un singleton.*

Exercice 17
Démontrer le théorème 7.

2.4 Propriétés algébriques de $\mathbb{R}$ liées à son ordre

Remarque 2.2
Dans $\mathbb{R}$, les positifs sont exactement les carrés

Si $x \geqslant 0$ on pose $y = \sup\{t \geqslant 0 \mid t^2 \leqslant x\}$.

Exercice 18
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additive, i.e. telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait :
$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Démontrer que f est $\mathbb{Q}$-linéaire, c'est à dire que pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$f(rx) = rf(x).$$
2. On suppose que f est monotone. Démonter que f est une homothétie.
3. On suppose que f est continue. Démontrer que f est une homothétie.

Exercice 19
Démontrer que le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ est Id_R.

Exercice 20
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, non réduit à $\{0\}$. On note $a = \inf H \cap \mathbb{R}_+^*$.

1. Si $a > 0$ démontrer que $H = a\mathbb{Z}$.
2. Si $a = 0$ démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 8
Un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \geqslant 0$ soit est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 21
Soient α et β des réels strictement positifs. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
(2) $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 22
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose :

$$G_f = \left\{a \in \mathbb{R} \mid (\forall x \in \mathbb{R})\big(f(a+x) = f(a)\big)\right\}.$$

Un élément de G_f s'appelle une période de f.

1. Démontrer que G_f est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ (il est donc de la forme $T\mathbb{Z}$ avec $T \geqslant 0$ et si $T \neq 0$, T s'appelle la période de f).
2. Que dire si 1 et $\sqrt{2}$ sont des périodes de f ?

Exercice 23
Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Démontrer que l'ensemble $\left\{e^{in2\pi\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ est dense dans le cercle unité S^1.

Exercice 24
Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

3 Valeurs d'adhérence d'une suite complexe

3.1 Extractions

Définition 6 *Soient (E, d) un espace métrique, (u_n) une suite dans E et $\lambda \in E$. On dit que λ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant N)(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon)$$

Remarque 3.1
Avec les notations de la définition 6, dire que λ est valeur d'adhérence de la suite (u_n) signifie exactement que pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ l'ensemble $A_{N,\varepsilon} = \{n \geqslant N \mid |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\}$ est non vide.

Définition 7 *Une extraction est une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Exercice 25
Soit φ est une extraction. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\varphi(n) \geqslant n$.

Théorème 9
Soient (u_n) une suite dans $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) λ est valeur d'adhérence de la suite (u_n).
(ii) Il existe φ extraction telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} \lambda$.

Exercice 26
Démontrer le théorème 9.

Définition 8 *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{C}$. Une suite extraite de (u_n) est une suite (v_n) telle qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant :*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_{\varphi(n)}).$$

Théorème 10
Soit une suite complexe (u_n) convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$. Alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.

Exercice 27
Démontrer le théorème 10.

Exercice 28
Soit (u_n) une suite réelle.

1. Donner en terme de sous-suite la négation de : « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ».
2. Donner une CNS, en terme de sous-suite, de la propriété : « la suite (u_n) n'est pas majorée ».
3. Donner une CNS, en terme de sous-suite, de la propriété : « la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$ ».

3.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 11
De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite dans $[a, b]$.

• On va construire par récurrence une suite $[a_n, b_n]$ de segments de $[a, b]$ telle l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n, b_n]\}$ soit infini.
On suppose pour un certain n que $[a_n, b_n]$ est construit. Au moins l'un des deux intervalles $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ et $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ possède la même propriété : on a ainsi construit $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.
On prend $a_0 = a$ et $b_0 = b$ pour initialiser.
Les suite (a_n) et $b_n)$ sont adjacentes : elles convergent vers la même limite $\ell \in [a, b]$.

• On va alors construire par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On pose $\varphi(0) = 0$. Supposons que $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ sont construits. On pose alors :

$$\varphi(n+1) = \min \underbrace{\{k > \varphi(n) \mid u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}}_{\text{partie non vide de } \mathbb{N}}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$: par sandwich, $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
□

Exercice 29
Démontrer que de toute suite complexe bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème 12
Une suite complexe bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 30
Démontrer le théorème 12.

3.3 Limite inf et limite sup

Exercice 31 (lim inf et lim sup)
Soit u une suite réelle. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $\Omega_n = \{u_k \mid k \geqslant n\}$.

1. Justifier que, pour tout $n \in N$, $a_n = \inf \Omega_n$ et $b_n = \sup \Omega_n$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Démontrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite. On note $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ leurs limites respectives.
3. On suppose que u est une suite bornée. Démontrer que $\liminf u_n$ est la plus petite des valeurs d'adhérences de u.
4. On suppose que u est une suite bornée telle que $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est le segment $[\liminf u_n, \limsup u_n]$.

Exercice 32
Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on ait :

$$a_{p+q} \leqslant a_p + a_q.$$

Démontrer que la suite $\dfrac{a_n}{n}$ converge.