Dénombrabilité, $\mathbb{R}$, suites numériques

Table des matières

1 Dénombrabilité, bijections **1**
1.1 Injection, surjection, bijection . . . 1
1.2 Généralités sur la dénombrabilité . . . 2

2 Le corps ordonné $\mathbb{R}$ **3**
2.1 Généralités . . . 3
2.2 Borne supérieure . . . 3
2.3 L'axiome de la borne supérieure et ses conséquences . . . 4
2.4 Propriétés algébriques de $\mathbb{R}$ liées à son ordre . . . 4

3 Valeurs d'adhérence d'une suite complexe **5**
3.1 Extractions . . . 5
3.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass . . . 6
3.3 Limite inf et limite sup . . . 7

1 Dénombrabilité, bijections

1.1 Injection, surjection, bijection

Définition 1 *Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.*

— *On dit que f est injective lorsque pour tout $(x, x') \in X^2$ on a :*

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

— *On dit que f est surjective lorsque* $\mathrm{Im}\, f = Y$ *où* $\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Exercice 1
Soient X et Y deux ensembles

1. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.
   Démontrer que g est surjective et que f est injective.
2. Soit $f : X \to Y$.
   a) Démontrer que f est surjective si et seulement s'il existe une application $s : Y \to X$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_Y$.
   b) Démontrer que f est injective si et seulement s'il existe une application $r : Y \to X$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Théorème 1
Soient X et Y deux ensembles. Alors il existe une injection $f : X \to Y$ si et seulement s'il existe une surjection $g : Y \to X$.

Exercice 2
Démontrer le théorème 1.

Exercice 3
On considère $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par $f(p, q) = 2^p(2q + 1)$. Démontrer que f est bijective.

Exercice 4
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que les ensembles $]-1, 1[$, $]a, b[$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection.

Exercice 5
Trouver une bijection de $]0, 1]$ sur $]0, 1[$.

Exercice 6
Soient X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On note $\{0,1\}^X$ l'ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de surjection de X sur $\mathcal{P}(X)$.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont en bijection.

Exercice 7
A l'aide de l'écriture décimale propre d'un réel, trouver une bijection de $[0,1[$ sur $[0,1[^2$.

1.2 Généralités sur la dénombrabilité

Définition 2 *Un ensemble E est dit au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ainsi lorsque E est dénombrable on peut numéroter ses éléments et écrire $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 8

1. Démontrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.
2. **Procédé diagonal de Cantor.** Démontrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$, n'est pas dénombrable.

Théorème 2

1. *Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.*
2. *Si E est au plus dénombrable et si $f : E \to F$ est surjective alors F est au plus dénombrable.*

Exercice 9
Démontrer le théorème 2.

Exercice 10

1. Démontrer que toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.
2. Démontrer que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Théorème 3

1. *Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
2. *Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*
3. *Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Exercice 11
Démontrer le théorème 3

Exercice 12

1. Démontrer que $\mathbb{Q}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, est dénombrable.
2. Un complexe α est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et dans le cas contraire il est dit *transcendant*. Démontrer qu'il existe des nombres transcendants.

Exercice 13 (Le théorème de Cantor-Bernstein)
Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une application injective $f : X \to Y$ et une application injective $g : Y \to X$.
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Berstein qui affirme qu'alors X et Y sont en bijection.

1. On suppose de plus dans cette première question que $Y \subset X$. On définit alors une suite de parties de X en posant :
$$\begin{cases} X_0 = X \setminus Y \\ X_n = f(X_{n-1}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$
On pose également $\widehat{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
   a) Démontrer que l'on définit correctement une application $h : X \to Y$ en posant :
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \widehat{X} \\ x & \text{si } x \in X \setminus \widehat{X} \end{cases}.$$
   b) Démontrer que h est une bijection.
2. En déduire le théorème de Cantor-Bernstein.

2 Le corps ordonné $\mathbb{R}$

2.1 Généralités

— $\mathbb{R}$ est un corps commutatif ordonné muni d'une valeur absolue.
— $\mathbb{R}$ est *archimédien* : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier n tel que $n > x$.
— $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: entre deux réels il y a un rationnel. Ainsi :

1. $\mathbb{Q}$ rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$;
2. Pour tout x réel, il existe une suite (r_n) dans $\mathbb{Q}$ telle que $r_n \xrightarrow[+\infty]{} x$.

— $\mathbb{R}$ est *complet* : toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente.
— $\mathbb{R}$ est *complet au sens de l'ordre* : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
— Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$ (et ce sont aussi exactement les parties connexes de $(\mathbb{R}, |\ |)$).

Exercice 14
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que la suite (H_n) est divergente.

Exercice 15

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $c > 0$. On suppose que $|f| \leqslant c\,|f'|$. Démontrer que $v(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telle que $ff'' = 0$.
   a) Démontrer que $v(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
   b) Démontrer que f est affine.

2.2 Borne supérieure

Définition 3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ (pensez à $[0,1[$ dans ce qui suit).* ***Sous réserve d'existence*** *:*

1. *Un* ***majorant*** *de A* ***dans*** *$\mathbb{R}$ est un réel v tel que pour tout $a \in A$ on ait : $a \leqslant v$.*
2. *Un* ***plus grand élément*** *de A est un majorant de A* ***qui appartient*** *à A*

Exercice 16

1. Démontrer que si M est un plus grand élément de $A \subset \mathbb{R}$ alors M est unique : on note $M = \max A$.
2. Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

Définition 4 ***Sous réserve d'existence****,* ***La borne supérieure de*** *A* ***dans*** *$\mathbb{R}$, notée $\sup A$, est le plus petit des majorants de A* ***dans*** *$\mathbb{R}$.*

Théorème 4 (Caractérisations pratiques de la borne supérieure)
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *On a l'équivalence :*

$$\alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall a \in A)(a \leqslant \alpha) \\ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists a_\varepsilon \in A)\,(\alpha - \varepsilon < a_\varepsilon) \end{cases}$$

2. ***Caractérisation séquentielle de la borne supérieure****.*
   Les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (1) $\alpha = \sup A$.
   (2) *Pour tout $a \in A$ on a $a \leqslant \alpha$ et il existe une suite (a_n) dans A telles que $a_n \xrightarrow[+\infty]{} \alpha$.*

Exercice 17
Démontrer le théorème 4.

2.3 L'axiome de la borne supérieure et ses conséquences

Axiome de la borne supérieure. Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1
Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet « une borne supérieure » et une « borne inférieure ».

Théorème 5 (Théorème de la limite monotone - Version pour les suites)
Toute suite réelle croissante admet une limite en $+\infty$.
En particulier une suite réelle croissante et majorée converge.

Exercice 18
Démontrer le théorème 5.

Exercice 19

1. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue, décroissante et positive. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :
$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Démontrer que la suite (Δ_n) converge.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Démontrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ où (ε_n) est une suite qui converge vers 0.
Donner un équivalent de H_n en $+\infty$.

Théorème 6 (Théorème de la limite monotone - Version pour les fonctions)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

1. *La fonction f admet une limite aux bornes de l'intervalle I.*
2. *La fonction f admet une limite **réelle** à droite et à gauche en tout point de I.*

Exercice 20
Démontrer le théorème 6.

Définition 5 *Deux suites réelles sont adjacentes lorsque :*

- *l'une est décroissante ;*
- *l'autre est croissante ;*
- *la limite de la différence des deux suites est nulle.*

Théorème 7 (Théorème des suites adjacentes ou des segments emboités)

1. *Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel. Ce réel est l'unique réel ℓ tel que, pour tout n entier naturel, on ait :*
$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$
2. *Soit (S_n) une suite de segments de $\mathbb{R}$ décroissante pour l'inclusion. On suppose que :* $\operatorname{diam}(S_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. *Alors* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ *est un singleton.*

Exercice 21
Démontrer le théorème 7.

2.4 Propriétés algébriques de $\mathbb{R}$ liées à son ordre

Remarque 2.2
Dans $\mathbb{R}$, les positifs sont exactement les carrés
Un carré est positif via la règle des signes.
Soit $x \geqslant 0$. On pose $y = \sup \underbrace{\left\{t \geqslant 0 \mid t^2 \leqslant x\right\}}_{=A}$ (A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$).
On vérifie $y^2 = x \ldots$

Exercice 22
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additive, i.e. telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait :
$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Démontrer que f est $\mathbb{Q}$-linéaire, c'est à dire que pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$f(rx) = rf(x).$$
2. On suppose que f est monotone. Démonter que f est une homothétie.
3. On suppose que f est continue. Démontrer que f est une homothétie.

Exercice 23
Démontrer que le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ est Id_R.

Exercice 24
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, non réduit à $\{0\}$. On note $a = \inf H \cap \mathbb{R}_+^*$.
1. Si $a > 0$ démontrer que $H = a\mathbb{Z}$.
2. Si $a = 0$ démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 8
Un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \geqslant 0$ soit est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 25
Soient α et β des réels strictement positifs. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
(1) $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
(2) $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 26
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose :
$$G_f = \left\{a \in \mathbb{R} \mid (\forall x \in \mathbb{R})\big(f(a+x) = f(a)\big)\right\}.$$
Un élément de G_f s'appelle une période de f.

1. Démontrer que G_f est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ (il est donc de la forme $T\mathbb{Z}$ avec $T \geqslant 0$ et si $T \neq 0$, T s'appelle la période de f).
2. Que dire si 1 et $\sqrt{2}$ sont des périodes de f ?

Exercice 27
Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Démontrer que l'ensemble $\left\{\mathrm{e}^{in2\pi\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ est dense dans le cercle unité S^1.

Exercice 28
Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

3 Valeurs d'adhérence d'une suite complexe

3.1 Extractions

Définition 6 *Soient (E, d) un espace métrique, (u_n) une suite dans E et $\lambda \in E$. On dit que λ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) lorsque :*
$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant N)(|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon)$$

Remarque 3.1
Avec les notations de la définition 6, dire que λ est valeur d'adhérence de la suite (u_n) signifie exactement que pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ l'ensemble $A_{N,\varepsilon} = \{n \geqslant N \mid |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon\}$ est non vide.

Définition 7 *Une extraction est une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.*

Exercice 29
Soit φ une extraction. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\varphi(n) \geqslant n$.

Théorème 9
Soient (u_n) une suite dans $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) λ est valeur d'adhérence de la suite (u_n).
(ii) Il existe φ extraction telle que $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

Exercice 30
Démontrer le théorème 9.

Définition 8 *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{C}$. Une suite extraite de (u_n) est une suite (v_n) telle qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant :*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_{\varphi(n)}).$$

Théorème 10
Soit une suite complexe (u_n) convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$. Alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.

Exercice 31
Démontrer le théorème 10.

Exercice 32
Soit (u_n) une suite réelle.

1. Donner en terme de sous-suite la négation de : « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ».
2. Donner une CNS, en terme de sous-suite, de la propriété : « la suite (u_n) n'est pas majorée ».
3. Donner une CNS, en terme de sous-suite, de la propriété : « la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$ ».

Exercice 33
Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer qu'il existe une extraction φ telle que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge.

3.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 11
De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite dans $[a, b]$.

• On va construire par récurrence une suite $[a_n, b_n]$ de segments de $[a, b]$ telle l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n, b_n]\}$ soit infini.
On suppose pour un certain n que $[a_n, b_n]$ est construit. Au moins l'un des deux intervalles $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ et $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ possède la même propriété : on a ainsi construit $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.
On prend $a_0 = a$ et $b_0 = b$ pour initialiser.
Les suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes : elles convergent vers la même limite $\ell \in [a, b]$.

• On va alors construire par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On pose $\varphi(0) = 0$. Supposons que $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ sont construits. On pose alors :

$$\varphi(n+1) = \min \underbrace{\{k > \varphi(n) \mid u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}}_{\text{partie non vide de } \mathbb{N}}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$: par sandwich, $u_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
□

Exercice 34
Démontrer que de toute suite complexe bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème 12
Une suite complexe bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 35
Démontrer le théorème 12.

Exercice 36
Soit (u_n) une suite réelle bornée et A l'ensemble des ses valeurs d'adhérences. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 0 \Leftrightarrow f \text{ est nulle sur } A.$$

Exercice 37
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que la suite (u_n) admet une unique valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - \ell| \leqslant 1\}$ est infini.
2. On pose $B = \mathbb{N} \setminus A$. Démontrer que B est un ensemble fini.
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3.3 Limite inf et limite sup

Exercice 38 (lim inf et lim sup)
Soit u une suite réelle. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $\Omega_n = \{u_k \mid k \geqslant n\}$.

1. Justifier que, pour tout $n \in N$, $a_n = \inf \Omega_n$ et $b_n = \sup \Omega_n$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Démontrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite. On note $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ leurs limites respectives.
3. On suppose que u est une suite bornée. Démontrer que $\liminf u_n$ est la plus petite des valeurs d'adhérences de u.
4. On suppose que u est une suite bornée telle que $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est le segment $[\liminf u_n, \limsup u_n]$.

Exercice 39
Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on ait :

$$a_{p+q} \leqslant a_p + a_q.$$

Démontrer que la suite (a_n/n) converge.

Exercice 40 (Un théorème de Weierstraß)
On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $f(\mathbb{R})$ contienne des réels.

On suppose que f vérifie :

(H1) *Pour tout λ réel et tout x dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda < f(x)$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout y dans V on ait $\lambda \leqslant f(y)$;*
(H2) *Il existe γ réel tel que $\{x \in \mathbb{R}/f(x) \leqslant \gamma\}$ soit non vide et borné dans $\mathbb{R}$.*

1. Montrer que pour toute suite (x_n) dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ alors $\liminf f(x_n) \geqslant f(x)$.
2. Prouver l'existence de x_0 dans X tel que $f(x_0) = \inf\limits_{\mathbb{R}} f$.