AUTOUR DE LA NOTION DE DIMENSION TOPOLOGIQUE

GUILLAUME BULTEAU

Sommaire

1. Introduction 1
2. Un peu d'histoire 2
3. Les méthodes de la topologie algébrique 2
3.1. Une preuve du théorème 1 2
3.2. Une autre illustration des méthodes de la topologie algébrique : le théorème de Brouwer 3
4. Dimensions topologiques 4
4.1. Introduction 4
4.2. Une preuve du théorème 2 4
4.3. La petite dimension inductive ou dimension de Menger-Urysohn 4
4.4. La preuve de $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n = n$ 6
5. Quelques précisions 8
5.1. Deux espaces homéomorphes et une bijection continue de X sur Y qui n'est pas un homéomorphisme 8
5.2. Exemple d'espaces non homéomorphes pour lesquels il existe des bijections continues $X \to Y$ et $Y \to X$ 8
5.3. Dimension de Lebesgue versus dimension de Hausdorff 9
5.4. Tout compact de $\mathbb{R}^n$ est image continue de K_3, d'où les courbes de Peano 9
Bibilographie 10

1. Introduction

On connaît le résultat suivant :

Théorème 1. *Il n'existe pas d'homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$ lorsque $p \neq n$.*

Manu a posé deux questions à propos de ce résultat :

(1) Est-ce encore vrai pour une application bijective continue mais de réciproque non continue ?

(2) Existe-t-il de telles applications de $\mathbb{R}^n$ dans lui même ?

Pour la première question, la réponse est positive :

Théorème 2. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application bijective et continue alors $p = n$.*

On va s'intéresser à ce théorème. Mais avant tout rappelons quelques propriétés des homéomorphismes.

Lorsque $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, pour tout $A \subset X$ on a :

(1) A ouvert de X si et seulement si $f(A)$ ouvert de Y ;

(2) A fermé de X si et seulement si $f(A)$ fermé de Y ;

(3) $f(\partial_X A) = \partial_Y f(A)$ (∂_X est l'opérateur frontière dans X) ;

(4) A est un voisinage de x dans X si et seulement si $f(A)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y...

2. Un peu d'histoire

En 1877 Cantor découvre une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \geqslant 1$. Ce fût une grosse surprise. Puis on découvre les courbes de Péano (1890) : il existe des surjections continues de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^n$. Une idée pour démontrer l'existence de telles courbes est la suivante :

(1) Tout fermé de K_3 est un rétracte de K_3 ;

(2) Cela implique que tout compact de $\mathbb{R}^n$ est image continue de K_3 ;

(3) $[0, 1]^n$ est image continue de K_3. On prolonge cette application à $[0, 1]$ via le théorème de Tietze.

Le théorème 1 a été prouvé par Brouwer en 1911, de manière assez confuse...

Tous ces résultats ont amené les mathématiciens de l'époque à définir la notion de dimension d'un espace topologique, notion qui doit être un invariant topologique (stable par homéomorphisme). La théorie des dimensions a été élaborée principalement entre les années 1920 et 1940. L'idée de définir par récurrence la notion de dimension est due à Poincaré sans qu'il donne une définition tout à fait correcte.

3. Les méthodes de la topologie algébrique

3.1. **Une preuve du théorème 1.** L'idée est d'associer à chaque espace topologique X un groupe $G(X)$ et à chaque application continue $f : X \to Y$ un morphisme

$$G(f) : G(X) \to G(Y)$$

de manière que :

(A) Si $f = \mathrm{Id}_X$ alors $G(f) = \mathrm{Id}_{G(X)}$;

(B) Si $g : Y \to Z$ est continue, alors :

$$G(g \circ f) = G(g) \circ G(f).$$

Dans ce cas on dit que G est un foncteur covariant : le sens des flèches est le même.

On a plusieurs exemples de telles constructions :

(1) $G = \pi_1$;

(2) $G = H_*$ (homologie ...)

Lorsque f est un homéomorphisme de X sur Y, $G(f)$ est un isomorphisme de $G(X)$ sur $G(Y)$.

Pour que le problème de l'existence d'un homéomorphisme de X sur Y ait une solution il est nécessaire (mais en général pas suffisant) que le problème algébrique dérivé i.e. l'existence d'un isomorphisme de $G(X)$ sur $G(Y)$ ait une solution.

On peut aussi inverser le sens des flèches : on dit que G est un foncteur contravariant. Dans ce cas, une application continue $f : X \to Y$ induit $G(f) : G(Y) \to G(X)$, et si $g : Y \to Z$ est continue, on a :

$$G(g \circ f) = G(f) \circ G(g).$$

Comme exemple, pour illustrer notre propos, on prend la cohomologie à support compacte : $G = H^n_c$. Dans ce cas :

$$G(\mathbb{R}^p) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Cela démontre le théorème 1 : le problème algébrique dérivé n'a pas de solution.

3.2. **Une autre illustration des méthodes de la topologie algébrique : le théorème de Brouwer.** Notons D^n la boule unité (fermée) de $\mathbb{R}^n$ et $S^{n-1} = \partial D^n$.

Théorème 3 (Le théorème du point fixe de Brouwer)**.** *Si $f : D^n \to D^n$ est continue alors f admet un point fixe.*

Pour démontrer ce théorème, on commence par établir le lemme suivant :

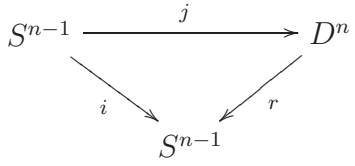
Lemme 1. *Il n'existe pas d'application continue $r : D^n \to S^{n-1}$ telle que $r\,|_{S^{n-1}} = \mathrm{Id}_{S^{n-1}}$. Autrement dit S^{n-1} n'est pas un rétracte de D^n.*

Démonstration. Pour $n = 1$ c'est évident par connexité : l'image continue d'un connexe est connexe et S^0 est disconnexe.

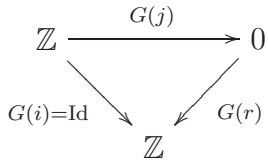
Pour $n \geqslant 2$, on prend $G = H_{n-1}$ (homologie singulière, par exemple). On a :

$$G(S^{n-1}) = \mathbb{Z} \text{ et } G(D^n) = 0.$$

On raisonne par l'absurde. On suppose donc que $i : S^{n-1} \to S^{n-1}$ se prolonge en une application continue $r : D^n \to S^{n-1}$.



Algébriquement on obtient donc le diagramme commutatif :



ce qui est impossible : Id n'est pas le morphisme nul. □

On peut maintenant prouver le théorème du point fixe de Brouwer. Soit $f : D^n \to D^n$ continue. On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'admet pas de point fixe. Ainsi, pour tout x dans D^n, on a $f(x) \neq x$. On considère alors la demi-droite $[f(x)x)$ dans $\mathbb{R}^n$ qui coupe S^{n-1} en $r(x)$. Cela définit une fonction continue $r : D^n \to S^{n-1}$ qui prolonge $\mathrm{Id}_{S^{n-1}}$, ce qui est absurde.

4. Dimensions topologiques

4.1. **Introduction.** Le but est de définir une fonction sur la collection des espace topologiques qui à tout X associe un entier $\dim_t X \geqslant -1$ ou $+\infty$, de manière que :

(D1) Si X et Y sont homéomorphes alors $\dim_t X = \dim_t Y$;

(D2) $\dim_t$ est croissante pour l'inclusion ;

(D3) $\dim_t \mathbb{R}^n = n$;

(D4) Lorsque $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ où chaque F_i est fermé dans X et $\dim_t F_i \leqslant n$ pour tout i dans $\mathbb{N}$ alors $\dim_t X \leqslant n$.

Conséquence : si K est un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide alors $\dim_t K = n$, puisque K contient une boule ouverte qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

4.2. **Une preuve du théorème 2.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ qui est continue et bijective. Pour i dans $\mathbb{N}^*$ on considère la boule fermée $B(0,i)$ de R^n. On pose, pour tout i dans $\mathbb{N}$, $F_i = f(B(0,i))$. Chaque F_i est compact dans $\mathbb{R}^p$ comme image continue d'un compact. Puis $f_i = f\,|^{F_i}_{B(0,i)}$ est un homéomorphisme, donc chaque F_i est de dimension n et ainsi $n \leqslant p$.

Puis, par surjectivité de f, si $y \in \mathbb{R}^p$, il existe i dans $\mathbb{N}$ et x dans $B(0,i)$ tel que $f(x) = y$; donc $y \in F_i$. Il en résulte que $\mathbb{R}^p = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$, donc $\dim_t \mathbb{R}^p \leqslant n$. Ainsi $n = p$. □

Commentaire. Si on peut faire le même genre de truc (prendre un autre recouvrement à la source) de manière que le recouvrement (F_i) soit localement fini alors on peut démontrer que f est un homéomorphisme.

4.3. **La petite dimension inductive ou dimension de Menger-Urysohn.** On va se restreindre au cas des espaces normaux. Un espace topologique X est dit normal lorsque :

(1) Les singletons de X sont des parties fermées de X ;

(2) Dès que A et B sont des fermées disjoints de X, il existe U et V ouverts disjoints de X tels que :

$$A \subset U \quad \text{et} \quad B \subset V.$$

Definition 1. A chaque X espace normal on associe un entier $\operatorname{ind} X \geqslant -1$ ou $+\infty$ de la manière suivante :

(1) Si $X = \emptyset$, $\operatorname{ind} X = -1$;

(2) $\operatorname{ind} X \leqslant n$ lorsque, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x dans X et un ouvert U tel que :

$$x \in U \subset V \quad \text{et} \quad \operatorname{ind} \partial U \leqslant n-1;$$

(3) $\operatorname{ind} X = n$ lorsque $\operatorname{ind} X \leqslant n$ et $\operatorname{ind} X > n-1$;

(4) $\operatorname{ind} X = +\infty$ lorsque $\operatorname{ind} X \geqslant n$ pour tout n entier naturel.

Théorème 4. *(1)* ind *vérifie* (D1) *: c'est un invariant topologique.*

(2) ***Théorème du sous-espace.*** ind *vérifie* (D2).

Démonstration. • Pour (D1). On montre par récurrence sur n la propriété suivante.

Dès que X vérifie $\operatorname{ind} X = n$ *et X est homéomorphe à Y, alors* $\dim Y = n$. Pour $n = -1$, le résultat est évident. On suppose que le résultat est vrai au rang n. Soit X un espace de dimension $n+1$ homéomorphe à Y via f. Soit y dans Y et W un voisinage de y dans Y. Comme $\operatorname{ind} X = n+1$, il existe un ouvert U de X tel que, si $x = f^{-1}(y)$, on ait :

$$x \in U \in f^{-1}(W) = V \quad \text{et} \quad \operatorname{ind} \partial U \leqslant n.$$

On a alors $y \in f(U) \subset W$ et $\operatorname{ind} \partial f(U) \leqslant n$, puisque, par hypothèse de récurrence, les espaces U et $f(U)$ ont même dimension. Ainsi :

$$\operatorname{ind} Y \leqslant n.$$

Il reste à démontrer que $\operatorname{ind} Y > n$, ce qui peut se faire par l'absurde (même raisonnement)...

• Pour (D2). C'est évident si $\dim X = \infty$. On raisonne en fait par récurrence et on démontre la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$: *Si* $\operatorname{ind} X = n$ *et si* $A \subset X$ *alors* $\operatorname{ind} A \leqslant n$.

C'est évident si $n = -1$. On suppose que le résultat est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et on considère $A \subset X$ tel que $\operatorname{ind} X = n+1$. Soit x dans A, V un voisinage de x dans A pour la topologie trace. Il existe donc O ouvert de X tel que :

$$x \in O \cap A \subset V.$$

Comme X est de dimension $n+1$, il existe O_1 ouvert de X tel que :

$$x \in O_1 \subset O \quad \text{et} \quad \operatorname{ind} \partial O_1 \leqslant n.$$

On pose alors $U = O_1 \cap A$, qui est un ouvert de A. La frontière de U dans A, $\partial_A U$, est un sous-espace de ∂O_1. On applique alors l'hypothèse de récurrence : $\operatorname{ind}\partial_A U \leqslant \operatorname{ind}\partial O_1 \leqslant n$. Il en résulte que $\operatorname{ind} A \leqslant n+1 = \operatorname{ind} X$. □

Remarquons que si A est discret, $\operatorname{ind} A = 0$. Puis $\operatorname{ind} R = 1$ de manière évidente, $\operatorname{ind}[0,1] = 1$ et $\operatorname{ind} S^1 = 1$.

Théorème 5. *Pour tout n entier on a :* $\operatorname{ind}\mathbb{R}^n \leqslant n$. *Ainsi* $\operatorname{ind}[0,1]^n \leqslant n$ *et* $\operatorname{ind} S^n \leqslant n$.

Démonstration. On procède par récurrence. On suppose le résultat vrai au rang n. Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Si V est un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(x,r) \subset V$. Mais $\partial B(x,r) = S(x,r) \sim S^n$, qui est de dimension $\leqslant n$, via le théorème du sous-espace, donc $\dim \mathbb{R}^{n+1} \leqslant n+1$. □

Théorème 6 (Le théorème de la somme)**.** ind *vérifie* (D4) *sur la collection des espaces métriques séparables.*

Idée de démonstration. C'est une récurrence assez technique sur $\operatorname{ind} X = n$, le plus difficile étant l'initialisation à $n = 0\ldots$ □

Il reste à démontrer que $\operatorname{ind}\mathbb{R}^n = n$. C'est en fait le résultat le plus délicat à établir. Le théorème du point fixe de Brouwer intervient ici, ainsi que deux nouvelles notions de dimensions : la grande dimension inductive et la dimension de Lebesgue, qui coïncident avec ind sur la collection des métriques séparables.

4.4. **La preuve de** $\operatorname{ind}\mathbb{R}^n = n$**.** Pour établir cette égalité, il semble nécessaire d'introduire une nouvelle dimension : la dimension de Lebesgue qui coïncide avec ind sur la collection des espaces métriques séparables. On a besoin pour définir cette dimension de quelques notions concernant les recouvrements.

Soit X un espace topologique, $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille de parties de X. L'ordre de $\mathcal{A}$ est le plus grand entier n tel que la famille $\mathcal{A}$ contiennent $n+1$ ensembles avec une intersection non vide ; si un tel entier n'existe pas, l'ordre de $\mathcal{A}$ est $+\infty$.

Ainsi, si l'ordre de $\mathcal{A}$ est $n+1$, dès que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}$ sont des ensembles distincts de $\mathcal{A}$, on a :

$$A_{\alpha_1} \cap \cdots \cap A_{\alpha_{n+2}} = \emptyset.$$

Si $\mathcal{A}$ est un recouvrement de X, un raffinement de $\mathcal{A}$ est un recouvrement $\mathcal{B}$ de X tel que pour tout $B \in \mathcal{B}$ il existe $A \in \mathcal{A}$ vérifiant $B \subset A$.

Definition 2. A tout espace normal X on associe la dimension de Lebesgue de X, notée ici $\dim_t X$, qui est un entier supérieur à -1 ou $+\infty$. La fonction $\dim_t$ est définie de la manière suivante :

(1) $\dim_t X \leqslant n$ lorsque tout recouvrement ouvert fini de X a un raffinement d'ordre $\leqslant n$;

(2) $\dim_t X = n$ lorsque $\dim_t X \leqslant n$ et $\dim_t X > n-1$;

(3) $\dim_t X = \infty$ si $\dim_t X > n$ pour tout entier $n \geqslant -1$.

On arrive à se convaincre, avec des dessins, que $\dim_t[0,1] = 1$. Cette dimension ne vérifie le théorème du sous-espace que pour des parties fermées.

On a besoin d'une nouvelle définition. Soit X un espace topologique, A et B des parties fermées disjointes de X. Une partie $L \subset X$ est une partition entre A et B s'il existe des ouverts U et W de X tels que :

$$A \subset U,\ B \subset W, U \cap W = \emptyset \ \text{ et } \ X \setminus L = U \cap W.$$

Le fait que ind *et* $\dim_t$ coïncident (pas si évident) sur les espaces métriques séparables permet de démontrer le résultat suivant.

Théorème 7. *Un espace métrique séparable X vérifie* $\operatorname{ind} X \leqslant n$ *si et seulement si, dès que $(A_1, B_1), \dots (A_{n+1}, B_{n+1})$ sont des couples de parties fermées disjointes de X il existe $L_1, \dots, L_{n+1}$ tels que L_i est une partition entre A_i et B_i et*

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset.$$

Le résultat suivant concernant $[0,1]^n$ permet alors de conclure, avec le théorème précédent, que $\operatorname{ind}[0,1]^n \geqslant n$ donc $\operatorname{ind}\mathbb{R}^n = n$ puisque l'on a déjà vu que $\operatorname{ind} R^n \leqslant n$.

Théorème 8. *Soient A_i et B_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) les faces de $[0,1]^n$ définies par :*

$$A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = 0\} \quad et \quad B_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = 1\}.$$

Si L_i est une partition entre A_i et B_i, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors :

$$\bigcap_{i=1}^{n} L_i \neq \emptyset.$$

Démonstration. Soient U_i et W_i des ouverts de $[0,1]^n$ tels que :

$$U_i \cap W_i = \emptyset,\ A_i \subset U_i,\ B_i \subset W_i \ \text{ et } \ [0,1]^n \setminus L_i = U_i \cup W_i.$$

Pour x dans $[0,1]^n$ on pose :

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\operatorname{dist}(x, L_i)}{\operatorname{dist}(x, L_i) + \operatorname{dist}(x, A_i)} + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \notin W_i \\ -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\operatorname{dist}(x, L_i)}{\operatorname{dist}(x, L_i) + \operatorname{dist}(x, B_i)} + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \notin U_i \end{cases}$$

Cette fonction $f_i : [0,1]^n \to [0,1]$ est continue ($\dots$) et :

$$f_i^{-1}(\tfrac{1}{2}) = L_i, f_i(A_i) = 1 \ \text{ et } \ f_i(B_i) = 0.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que $\bigcap_{i=1}^n L_i = \emptyset$. La fonction $f = (f_1, \dots, f_n) : [0,1]^n \to [0,1]^n$ est continue et ne prend pas la valeur $a = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$. On considère la projection radiale issue de a :

$$p : [0,1]^n \setminus \{a\} \to \partial[0,1]^n$$

qui à $x \neq a$ associe l'intersection avec $\partial[0,1]^n$ de la demi droite $[a, x)$.

On a $g([0,1]^n) \subset \partial[0,1]^n$, $g(A_i) \subset B_i$ et $g(B_i) \subset A_i$: cette application ne peut avoir de point fixe. On a donc une contradiction avec le théorème de Brouwer. □

5. Quelques précisions

5.1. **Deux espaces homéomorphes et une bijection continue de X sur Y qui n'est pas un homéomorphisme.** On prend

$$X = Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [2k, 2k+1[,$$

ainsi que $f : X \to X$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \text{ si } x \in [0,1[\\ \dfrac{x-1}{2} \text{ si } x \in [2,3[\\ x-2 \text{ si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

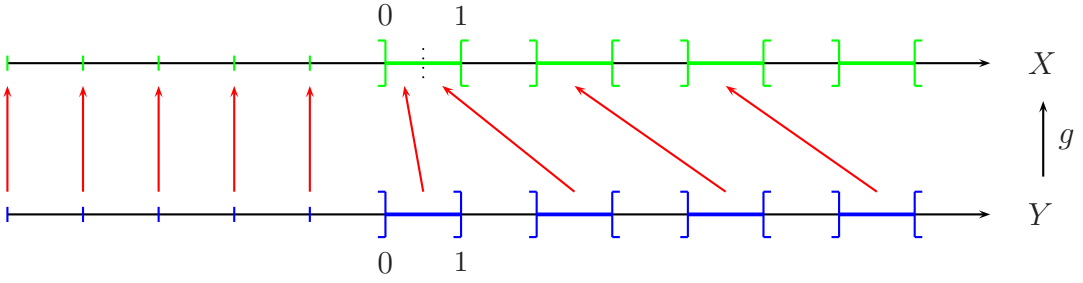
5.2. **Exemple d'espaces non homéomorphes pour lesquels il existe des bijections continues $X \to Y$ et $Y \to X$.** On note $\mathbb{Z}^-$ l'ensemble des entiers strictement négatifs. On considère alors :

$$\begin{cases} X = \mathbb{Z}^- \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]2k, 2k+1[\\ Y = X \cup \{1\} \end{cases}$$

Ces espaces ne sont pas homéomorphes : des composantes connexes sont de natures différentes ($[0,1[$ et $[0,1]\ldots$). On considère $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ définies par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \leqslant -2 \\ 1 \text{ si } x = -1 \\ x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2} \text{ si } x \in]0,1] \\ \dfrac{x-1}{2} \text{ si } x \in]2,3[\\ x-2 \text{ si } x \geqslant 4 \end{cases}$$



5.3. **Dimension de Lebesgue versus dimension de Hausdorff.** La première est un entier, la seconde n'en est pas forcément un. La dimension de Hausdorff est une notion métrique.

Definition 3. Soit (X, dist) un espace métrique et $d \geqslant 0$. Pour un recouvrement dénombrable $\mathcal{R} = \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de X on pose :

$$w_d(\mathcal{R}) = \sum_i (\mathrm{diam} S_i)^d.$$

Pour $\varepsilon > 0$ on pose :

$$\mu_{d,\varepsilon} = \inf\left\{w_d(\mathcal{R}) \mid (\forall i \in \mathbb{N})(\mathrm{diam} S_i \leqslant \varepsilon)\right\}.$$

La mesure de Hausdorff de X de dimension d est :

$$\mu_d(X) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_{d,\varepsilon}(X).$$

Théorème 9. *Pour tout espace métrique (X, dist), il existe d_0 dans $\mathbb{R}^+$ tel que $\mu_d(X) = 0$ pour tout $d > d_0$ et $\mu_d(X) = +\infty$ pour tout $d < d_0$. Ce réel d_0 est la dimension de Hausdorff de (X, dist), notée $\dim_H(X, \mathrm{dist})$.*

La fonction $\dim_H$ (définie sur la collection des espaces métriques) vérifie (D2), (D3) et (D4) (avec les F_i quelconques) mais pas (D1).

Théorème 10. *La dimension de Lebesgue de (X, d) est l'infimum des dimensions de Hausdorff de X, l'infimum étant pris sur toutes les métriques sur X qui induisent la topologie initiale de (X, d).*

5.4. **Tout compact de $\mathbb{R}^n$ est image continue de K_3, d'où les courbes de Peano.** K_3 est l'ensemble triadique de Cantor : c'est l'ensemble des réels x de $[0, 1]$ qui s'écrivent

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} \quad \text{avec} \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*)(a_k \in \{0, 2\}).$$

C'est un compact puisqu'il est fermé dans $[0, 1]$. De plus $[0, 1] \setminus K_3$ est dense dans $[0, 1]$.

Théorème 11. *Tout fermé A de K_3 est un rétracte de K_3 i.e. il existe $r : K_3 \to A$ continue qui prolonge Id_A.*

Démonstration. On regarde $\mathrm{dist}(x_0, A)$ pour x_0 dans $K3$. Par compacité de A, cette distance est atteinte. On a deux cas possibles.

Cas 1. Cette distance est atteinte en deux points distincts : a_1 et a_2 de A tels que $a_1 < x_0 < a_2$. On dispose de y dans $[0, 1] \setminus K_3$ tel que

$$a_1 < y < x_0 < a_2.$$

Pour tout x dans $K_3 \cap [a_1, y]$ on pose $r(x) = a_1$ et pour tout x dans $K_3 \cap [y, a_2]$ on pose $r(x) = a_2$.

Cas 2. $\mathrm{dist}(x, A)$ est atteinte en un seul point a et $r(x)$ n'est pas encore défini. On pose $r(x) = a$. □

Théorème 12 (Alexandroff)**.** *Tout compact K non vide de $\mathbb{R}^n$ est image continue de K_3.*

Démonstration. Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une base dénombrable d'ouverts de K (un espace métrique compact est séparable...). Pour x dans K_3 on écrit (développement ternaire propre qui est unique) :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k}.$$

Pour k dans $\mathbb{N}^*$ on pose $f_k(x) = \begin{cases} \overline{U_k} & \text{si } x_k = 0 \\ X \setminus U_k & \text{si } x_k = 2 \end{cases}$ et on considère l'ensemble :

$$P(x) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} f_k(x).$$

Cet ensemble contient au plus un point ! En effet, si x et x' sont distincts dans K_3 alors il existe k tel que $x_k \neq x'_k$; ainsi $f_k(x) = \overline{U_k}$ et $f_k(x') = X \setminus U_k$ ou l'inverse.

Lorsque $P(x)$ est de cardinal 1 on pose $g(x) =$ l'élément de $P(x)$. On vient donc de définir une application

$$g : A \to K$$

où $A = \{x \in K_3 \mid P(x) \neq \emptyset\}$. On montre alors que g est surjective, continue puis que A est fermée dans K_3 (3 exos, dont 2 pas faciles).

Comme A est un rétracte de K_3, il existe $r : K_3 \to A$ continue telle que r prolonge Id_A. On prend alors $g \circ r : K_3 \to K$ qui est continue et surjective. □

Théorème 13. *Il existe $c : [0, 1] \to [0, 1]^n$ continue et surjective.*

Démonstration. Il existe $f : K_3 \to [0, 1]^n$ continue et surjective. Mais K_3 est un fermé de $[0, 1]$: le théorème de Tietze permet de prolonger f à $[0, 1]$. □

Bibilographie

Engelking : *General Topology* (se trouve sur le ouebe)
Engelking : *Dimension Theory* (ne se trouve pas, semble-t-il, sur le ouebe)
Dieudonné : *A history of algebraic topology* (se trouve sur le ouebe)
A handbook of general topology (se trouve sur le ouebe)

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, Université Montpellier 2, Case courrier 051, 34095 Montpellier cedex 5 - France

E-mail address: guillaume.bulteau@math.univ-montp2.fr