Le théorème de Denjoy

1. Mis en perspective

Le but de l'exposé est de démontrer le théorème G de [**GS87**].

Théorème G. — *Il existe des représentations $\phi : G \to \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ possédant un minimal exceptionnel.*

Corollaire 1.1. — *Tous les éléments de G ont un nombre de rotation rationnel. De plus tout rationnel est nombre de rotation d'un élément de G*

2. Le théorème de Denjoy

Théorème 2.1. — *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Homéo}_+(S^1)$. On a alors les trois possibilités suivantes qui s'excluent.*

(1) Γ admet une orbite fini.

(2) Toutes les orbites sont denses.

(3) Il existe un sous-espace compact $K \subset S^1$, infini, différent de S^1 et tel que les orbites des points de K sont denses dans K. Cet ensemble K est unique, contenu dans l'adhérence de chaque orbite et homéomorphe à un Cantor

Démonstration. — On considère l'ensemble $\mathcal{K}(S^1)$ des compacts de S^1, qui sont non vides et Γ-invariants. On ordonne $\mathcal{K}(S^1)$ par l'inclusion. Muni de cet ordre c'est un ensemble inductif. Il continent donc un compact minimal.

On choisit un de ces compacts minimaux K. Si $x \in K$, l'orbite de x, $\Gamma \cdot x$ est incluse dans K. Son adhérence est donc un compact de K. Cette adhérence est Γ-invariante, donc, par minimalité de K, elle est égale à K. Il en résulte que l'orbite de tout point de K est dense dans K.

Puis $\partial K = K - int(K)$ et l'ensemble K' des points d'accumulation de K sont des fermés et sont Γ-invariants. On a donc les possibilités suivantes :

(1) K' est vide. Dans ce cas K est fini et on, dispose donc d'une orbite fini.

(2) ∂K est vide, de sorte que $K = S^1$: toutes les orbites sont denses.

(3) $K' = K$ et $\partial K = K$. Ainsi K est un compact parfait de S^1 sans intérieur : c'est un Cantor.

Il reste à démontrer l'unicité de K dans le dernier cas. On montre pour cela que K est contenu dans l'adhérence de n'importe quelle orbite. Le complémentaire de K dans S^1 est une union disjointe d'une famille dénombrable d'intervalles ouvert. Soit x dans le complémentaire de K dans S^1. Ce point x est recouvert : il est dans un certain intervalle

I. Appelons a l'origine de cet intervalle I. Prenons maintenant un point y quelconque dans K. Il existe une suite γ_n dans Γ tel que $\gamma_n(a) \underset{+\infty}{\longrightarrow} y$ et $n \neq p \Rightarrow \gamma_n(a) \neq \gamma_p(a)$.

Il en résulte que les intervalles $\gamma_n(I)$, qui sont disjoints, vérifient : $\text{dist}(\gamma_n(a), \gamma_n(x)) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi :

$$\gamma_n(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} y.$$

Il en résulte que K est contenu dans l'adhérence de l'orbite de x. L'unicité en découle. □

3. Preuve du théorème G

Proposition 3.1. — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme qui vérifie :*

- *(I) Pour tout x réel $f(x+1) = f(x) + 2$;*
- *(II) $f(0) = 0$;*
- *(V) f possède au moins deux points fixes.*

Alors φ_f possède un minimal exceptionnel.

Démonstration. — Soient $\alpha < \beta$ deux points fixes de f.

• D'après (I), si $\beta \geqslant \alpha + 1$, par croissance de f on obtient :

$$\beta = f(\beta) \geqslant f(\alpha + 1) = f(\alpha) + 2 = \alpha + 2.$$

Une petite récurrence montre alors que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a : $\beta \geqslant \alpha + 2p$.

Il en résulte que $0 \leqslant \beta - \alpha < 1$.

• Rappelons que f induit $\widetilde{f} : S^1 \to S^1$. L'intervalle $I =]\alpha, \beta[$ se projette sur un ouvert V de S^1 qui est stable par f. Comme $\beta - \alpha < 1$, pour tout $x \in V$ on dispose de t unique dans I tel que $p(t) = x$. Par croissance de f, $I =]\alpha, \beta[$ est stable par f. Ainsi $\underbrace{p \circ f(t)}_{= \widetilde{f} \circ p(t)} \in V$.

V est donc stable par f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc :

$$\widetilde{f}^n(V) \subset V.$$

• On regarde maintenant l'ouvert $\widetilde{f}^{-1}(V)$. Il possède deux composantes connexes, dont l'une est V. De la même manière $\widetilde{f}^{-n}(V)$ est composé de 2^n intervalles disjoints dont 2^{n-1} correspondent à $\widetilde{f}^{-n-1}(V)$.

Il en résulte que $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{f}^{-n}(V)$ est un ouvert de S^1, distinct de S^1.

Comme $\widetilde{f}(\Omega) = \Omega$ et $\widetilde{f}^{-1}(\Omega) = \Omega$, Ω est saturé par la relation d'équivalence engendrée par f : il est invariant par $\varphi_f(G)$.

Les points de $S^1 \setminus \Omega$ ont donc une orbite non dense. Mais φ_f n'a pas d'orbite finie : il en résulte que φ_f possède un minimal exceptionnel. □

Théorème 3.2. — *Si $g \in G$, le nombre de rotation de l'homéomorphisme g de S^1 est rationnel.*

Démonstration. — Deux homéo semi-conjugués ont le même nombre de rotation. Il suffit donc de montrer que $\varphi_f(g)$ a un nombre de rotation rationnel. Selon le théorème de Denjoy, tout difféomorphisme de classe C^2 de S^1 de nombre de rotation irrationnel a toute ses orbites dense. Si f est bien choisie, ce ne peut être le cas. □

4. Le théorème de Denjoy

***Théorème 4.1* (Denjoy).** — *Soit $\widetilde{g}$ un difféomorphisme de S^1 préservant l'orientation, de classe C^2, alors $\widetilde{g}$ n'admet pas de compact minimal exceptionnel.*

Démonstration. — ***Lemme 4.2.*** — *Il existe θ réel tel que, pour tout t dans $\mathbb{R}$:*

$$|g''(t)| \leqslant \theta\, g'(t).$$

Preuve du lemme 4.2. — La fonction $\log g'$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, 1-périodique : sa dérivée est donc bornée par un réel θ. □

Lemme 4.3. — *Soient $x < y$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\left|\log \frac{(g^n)'(x)}{(g^n)'(y)}\right| \leqslant \theta \sum_{j=0}^{n-1} \left|g^j(y) - g^j(x)\right|.$$

Preuve du lemme 4.3. — On fixe $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned}(g^n)' &= (g \circ g^{n-1})' \\ &= (g' \circ g^{n-1}) \times (g^{n-1})' \\ &= (g' \circ g^{n-1}) \times (g' \circ g^{n-2}) \times (g^{n-2})' = \cdots \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} g \circ (g^{j-1})\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\log \frac{(g^n)'(x)}{(g^n)'(x)} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\log g'(g^j(x)) - \log g'(g^j(y))\right).$$

Soit $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. On écrit les accroissements finis ponctués pour $\log g'$ entre $g^j(x)$ et $g^j(y)$. Il existe c_i entre $g^j(x)$ et $g^j(y)$ tel que :

$$\log g'(g^j(x)) - \log g'(g^j(y)) = \frac{g''(c_j)}{g'(c_j)} g^j(y) - g^j(x).$$

On a alors :

$$\left|\log \frac{(g^n)'(x)}{(g^n)'(x)}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\left|\frac{g''(c_j)}{g'(c_j)}\right|}_{\leqslant \theta} \left|g^j(y) - g^j(x)\right|.$$

La preuve du lemme 4.3 est donc terminée. □

Lemme 4.4. — *Soit $J = \pi(]x_0, y_0[)$ une composante connexe de $S^1 \setminus K$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\ell_n = \log(\widetilde{g}^n(J))$. Pour tout $x \in [x_0, y_0]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$(g^n)'(x) \leqslant e^{\theta} \frac{\ell_n}{\ell_0}.$$

Preuve du lemme 4.4. — Pour $(x, y) \in [x_0, y_0]$ on a, d'après le lemme 4.3 :

$$\left|\log \frac{(g^n)'(x)}{(g^n)'(y)}\right| \leqslant \theta \sum_{j=0}^{n-1} \left|g^j(y) - g^j(x)\right| \leqslant \theta \sum_{j=0}^{n-1} \ell_j \leqslant 1.$$

Il en résulte que $(g^n)'(x) = \mathrm{e}^{\theta}(g^n)'(y)$.

Mais les accroissements finis ponctués donnent l'existence de c_n dans $[x_0, y_0]$ tel que :

$$\underbrace{g^n(y_0) - g^n(x_0)}_{=\ell_n} = (g^n)'(c_n) \underbrace{(y_0 - x_0)}_{=\ell_0}.$$

Le résultat du lemme est donc assuré. □

Remarque 4.5. — Le lemme précédent affirme que $(g^n)' \xrightarrow[[x_0,y_0]]{CU} 0$. On va montrer en fait qu'il ya convergence uniforme sur $[x_0 - \delta, y_0]$, pour $\delta > 0$ convenable.

Lemme 4.6. — *Sous les hypothèses précédentes, pour un certain $\delta > 0$ convenable et tout $x \in [x_0 - \delta, x_0]$, on a :*

$$(g^n)'(x) \leqslant e(g^n)'(x_0).$$

Preuve du lemme 4.6. — POn fait une récurrence faible sur n. Pour $n = 0$ le résultat est évident. Supposons que le résultat est vrai pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. D'après le lemme 4.3, pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0]$, on a :

$$\left|\log \frac{(g^n)'(x)}{(g^n)'(x_0)}\right| \leqslant \theta \sum_{j=0}^{n-1} \left|g^j(x) - g^j(x_0)\right|.$$

Les accroissements finis ponctués donnent, pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, l'existence de c_j tel que :

$$\left|g^j(x) - g^j(x_0)\right| = (g^j)'(c_j) \underbrace{|x - x_0|}_{\leqslant \delta}.$$

Il vient alors :

$$\left|\log \frac{(g^n)'(x)}{(g^n)'(x_0)}\right| \leqslant \theta \mathrm{e} \sum_{j=0}^{n-1} (g^j)'(x_0).$$

On utilise le lemme 4.4 pour obtenir :

$$\left|\log \frac{(g^n)'(x)}{(g^n)'(x_0)}\right| \leqslant \frac{\delta\theta \mathrm{e}^{\theta+1}}{\ell_0} \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \ell_j}_{\leqslant 1}.$$

Avec δ tel que $\dfrac{\delta\theta \mathrm{e}^{\theta+1}}{\ell_0} \leqslant 1$, le lemme est prouvé. □

Remarque 4.7. — Avec les hypothèses et notations précédentes :

$$(g^n)' \xrightarrow[[x_0-\delta,y_0]]{CU} 0.$$

Preuve du théorème de Denjoy.
On utilise les notations du lemme 4.4. On pose $s_0 = \pi(x_0)$. Comme $s_0 \in K$, l'orbite de s_0 est dense dans K. Il existe $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que :

$$\lim_{m\to+\infty} \widetilde{g}^{\alpha(k)}(s_0) = s_0.$$

Quitte à changer $\widetilde{g}$ en $\widetilde{g}^{-1}$, on peut donc supposer l'existence d'un entier naturel m tel que :

$$(g^m)'(x) \leqslant \frac{1}{1000} \text{ pour tout } x \in I = [x_0 - \delta, y_0] \text{ et } \widetilde{g}^m(s_0) \in \pi([x_0 - \delta/2, y_0]).$$

Il en résulte que $\widetilde{g}^p(J) \subset J$, où $J = \pi(I)$. Le théorème de Picard s'applique et affirme que g^p a un point fixe, donc une orbite périodique.

□

Références

[GS87] E. Ghys & V. Sergiescu – « Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle. (On a remarkable group of the diffeomorphisms of the circle). », *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), p. 185–239 (French).